Série A,
N° 2773
N° d'ordre :
3646

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Vincent OU TCHEN-YANG

1re THÈSE. — Contribution a l'étude des fonctions hypergéométriques de deux variables.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 16 juin 1954 devant la Commission d'examen.

MM. P. MONTEL *Président.*
R. GARNIER } *Examinateurs.*
D. DUGUÉ

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, EDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1955

Série A,
N° 2773
N° d'ordre :
3646

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR

Vincent OU TCHEN-YANG

1re THÈSE. — Contribution a l'étude des fonctions hypergéométriques de deux variables.

2e THÈSE. — Propositions données par la Faculté.

Soutenues le 16 juin 1954 devant la Commission d'examen.

MM. P. MONTEL *Président.*
R. GARNIER, D. DUGUÉ *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR-IMPRIMEUR-LIBRAIRE
55, Quai des Grands-Augustins, 55

1955

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... J. PÉRÈS.

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
A. DENJOY	T	Théorie des fonctions.
L. LUTAUD	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
E. DARMOIS	T	Enseignement de Physique.
ROBERT LÉVY	T	Physiologie comparée.
FOCH	T	Mécanique physique et expérimentale.
PAUTHENIER	T	Électrotechnique générale.
DE BROGLIE	T	Théories physiques.
JOB	T	Chimie générale.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.
PÉRÈS	T	Mécanique des fluides et applications.
LAUGIER	T	Physiologie générale.
M. CURIE	T	Physique (P. C. B.).
G. RIBAUD	T	Hautes températures.
CROZE	T	Physique théorique et Physique céleste.
DUPONT	T	Théories chimiques.
VALIRON	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.
BARRABÉ	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
G. DARMOIS	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
JACQUES BOURCART	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
AUBEL	T	Chimie biologique.
Mme JOLIOT-CURIE	T	Physique générale et Radioactivité.
PLANTEFOL	T	Botanique.
CABANNES	T	Recherches physiques.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.
PRÉVOST	T	Chimie organique.
BOULIGAND	T	Application de l'analyse à la Géométrie.
CHAUDRON	T	Chimie appliquée.
WYART	T	Minéralogie.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie végétale.
P. AUGER	T	Physique quantique et Relativité.
MONNIER	T	Physiologie générale.
PIVETEAU	T	Géologie.
ROCARD	T	Physique.
H. CARTAN	T	Mathématiques (E. N. Supérieure).
LAFFITTE	T	Chimie générale.
FAVARD	T	Mécanique générale.
COULOMB	T	Physique du Globe.
Mlle COUSIN	T	Biologie animale (P. C. B.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
P. DRACH	T	Zoologie.
KASTLER	T	Physique.
EPHRUSSI	T	Génétique.
WURMSER	T	Biologie physico-chimique.
RIVIÈRE	T	Géologie (P. C. B.).
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P. C. B.).
LUCAS	T	Physique.
A. THOMAS	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
MAX MORAND		Physique.
SOLEILLET	T	Physique.
FORTIER	T	Mécanique expérimentale des fluides.
DANJON	T	Astronomie.
FROMAGEOT	T	Chimie biologique.
LAPORTE	T	Physique générale et Radioactivité.
JANET	T	Mécanique analytique et Mécanique céleste.
PETIT	T	Biologie maritime.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
GALLIEN	T	Biologie animale (P. C. B.).
EICHHORN	T	Biologie végétale (P. C. B.).
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (P. C. B.).
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie-Physique.
THELLIER	T	Physique du Globe.
AUDUBERT	T	Électrochimie.
L'HÉRITIER	T	Génétique.
GRIVET	T	Radioélectricité.
PONCIN	T	Mécanique des fluides.
THIRY	T	Mécanique appliquée.
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
QUELET	T	Chimie (P. C. B.).
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.
JUNG	T	Pétrographie.
TRILLAT	T	Chimie physique.
WIEMANN	T	Chimie (M. P. C.).
JACQUINOT	T	Physique (P. C. B.).
VASSY		Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES		Théories physiques.
M. PRUVOST	T	Géologie.
AMIEL	T	Chimie (P. C. B.).
HOCART	T	Minéralogie.
J.-P. MATHIEU	T	Physique (P. C. B.).
COUTEAUX		Biologie animale (P. C. B.).
MAY		Biologie animale (P. C. B.).
FELDMANN		Biologie (P.C.B.).
GUINIER	T	Physique (P.C.B.).
JOST	T	Biologie (P.C.B.)
FORTET		Calcul des probabilités.
SCHWARTZ	T	Méthodes mathématiques de la physique.
CHOUARD	T	Physiologie végétale.
MALAVARD	T	Aviation.
BRELOT	T	Calcul différentiel.
NORMANT	T	Chimie (P. C. B.).
BENARD		Chimie (P. C. B.).
BUVAT		Botanique (E. N. S.).
DUGUÉ		Statistique mathématique.
GELOSO		Chimie (S. P. C. N.).
SOULAIRAC		Psychophysiologie.
ULRICH		Physiologie végétale.
MARÉCHAL		Optique théorique et appliquée.

Secrétaire Général..... CH. MONIER.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

A Monsieur Paul MONTEL,

HOMMAGE DE MA GRATITUDE

PREMIÈRE THÈSE

CONTRIBUTION A L'ÉTUDE

DES

FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES DE DEUX VARIABLES

INTRODUCTION.

Des quatre fonctions hypergéométriques de deux variables F_1, F_2, F_3, F_4 de P. Appell [1], la première est la généralisation la plus parfaite de la fonction hypergéométrique d'une variable. Elle est la seule des quatre qui admette comme expression analytique, outre son développement taylorien et sa représentation eulérienne par une intégrale double, une intégrale eulérienne simple. E. Picard [2], à qui on doit cette expression de F_1, a, de plus, étendu à F_1 le problème de Riemann et la méthode, de Riemann également, permettant de calculer le groupe de monodromie.

Le présent travail cherche à étendre de même la méthode géométrique de Schwarz, celle de Riemann étant analytique. Les exposants de la fonction hypergéométrique d'une variable $F(x)$ étant supposés réels, les fonctions de

(1) P. Appell, *Séries hypergéométriques de plusieurs variables* (*Mémor. Sc. Math.*, fasc. III, 1925, p. 3 et suiv.).

(2) E. Picard, *Extensions aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 2e série, t. 10, 1881, p. 303-322); *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant de séries hypergéométriques de deux variables* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 2, 1885, p. 357-384).

Schwarz, rapports de deux branches fondamentales de $F(x)$, représentent le demi-plan supérieur sur un triangle d'arcs de cercle que ces exposants déterminent à une transformation homographique près; les côtés circulaires du triangle déterminent à leur tour, par symétries successives, le groupe de monodromie correspondant; la conservation d'une forme d'Hermite par ce groupe de monodromie résulte ensuite du fait géométrique qu'on peut toujours trouver un cercle, réel ou imaginaire, orthogonal à trois cercles donnés.

L'extension de ces résultats au cas de deux variables indépendantes n'est pas immédiate. L'intuition géométrique du plan de Cauchy tombant en défaut, c'est dans l'espace projectif à deux dimensions complexes, donc à quatre dimensions réelles, que nous sommes conduits à nous placer. Là où l'on a uniformément, dans le cas des fonctions de Schwarz, des cercles, nous devons introduire, dans le cas présent, tantôt des chaînes planaires, à deux dimensions réelles, transformées homographiques du sous-espace réel, tantôt des hypersurfaces hermitiennes, à trois dimensions réelles. Les unes et les autres posent divers problèmes tant topologiques que proprement géométriques. L'examen de ces problèmes nous mettra sur la voie de l'extension en vue.

La fonction $F_1(x, y)$ étant multiforme, l'étude précise de ses diverses branches dans l'espace des variables x et y nécessite l'introduction d'hypersurfaces simples, semblables aux coupures de la théorie des fonctions hypergéométriques d'une variable, portant sur elles les six variétés linéaires à deux dimensions réelles que forment les points singuliers de $F_1(x, y)$. Me servant pour cela de quatre hypercônes hermitiens, j'obtiens ainsi un demi-domaine fondamental, simplement connexe et symétrique de son complémentaire, grâce auquel je fais disparaître toute équivoque sur les déterminations de $F_1(x, y)$ et les substitutions de son groupe de monodromie. Je mets ainsi en évidence une propriété de structure de ce dernier : les cinq substitutions fondamentales qui l'engendrent ne peuvent être données arbitrairement : elles vérifient un certain nombre de relations de permutabilité.

Les exposants $F_1(x, y)$ étant supposés réels, je regarde trois branches fondamentales de $F_1(x, y)$ comme les coordonnées homogènes d'un point dans un autre espace projectif à deux dimensions complexes (c'est une manière commode de considérer leurs rapports mutuels, généralisations des fonctions de Schwarz). Chaque substitution fondamentale du groupe de monodromie détermine dans cet espace une transformation homographique, produit de deux symétries successives par rapport à deux chaînes planaires. Je ramène ainsi le calcul du groupe de monodromie à l'étude géométrique d'un cycle de chaînes planaires. Les relations de permutabilité permettent de limiter à quatre le nombre de ces chaînes.

Nous montrerons ensuite : 1° qu'un cycle de quatre chaînes planaires dont deux consécutives ont en commun une chaîne linéaire dépend de quatre paramètres réels que laisse invariants toute transformation homographique;

2° qu'il existe une hypersurface hermitienne, et en général une seule, orthogonale aux quatre chaînes planaires. Nous obtiendrons ainsi le groupe de monodromie de $F_1(x, y)$ et la forme d'Hermite qu'il conserve, forme dont nous déterminerons la nature, elliptique ou hyperbolique.

Ces derniers résultats ont fait l'objet d'une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* ([3]).

CHAPITRE I.

Variétés singulières.

1. Données analytiques. — 1° La fonction hypergéométrique de deux variables $F_1(x, y)$ de P. Appell ([4]) peut être représentée par l'intégrale eulérienne

$$z = \int u^\alpha (u-1)^\beta (u-x)^\gamma (u-y)^\delta \, du \tag{1}$$

étendue à certaines lignes fermées. Elle vérifie le système d'équations aux dérivées partielles (p, q, r, s, t désignant les dérivées partielles de z du premier et du second ordre)

$$\left\{\begin{aligned} & x(x-1)r + y(y-1)s \\ & \quad = [(\alpha+\beta+2\gamma+\delta)x + \delta y - (\alpha+\gamma+\delta)]p - \gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)z, \\ & x(x-1)s + y(y-1)t \\ & \quad = [\gamma x + (\alpha+\beta+\gamma+2\delta)y - (\alpha+\gamma+\delta)]q - \delta(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)z, \\ & \qquad\qquad (y-x)s = \delta p - \gamma q, \end{aligned}\right. \tag{2}$$

la troisième équation, vérifiée par toute fonction de la forme

$$\int (u-x)^\gamma (u-y)^\delta f(u) \, du,$$

étant une conséquence des deux premières.

On démontre sans peine l'*intégrabilité complète* du système (2), quelles que soient les valeurs des constantes α, β, γ, δ. Un tel système possède des propriétés qui l'apparentent aux équations différentielles ordinaires. Ses solutions dépendent de constantes arbitraires et sont déterminées par des valeurs initiales. Le nombre des constantes arbitraires, qu'on peut appeler *ordre* du système, est celui des quantités dont les valeurs initiales déterminent chaque

---

([3]) V. Ou Tchen-Yang, *Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1524-1526).

([4]) P. Appell, *Séries hypergéométriques de plusieurs variables* (*Mémor. Sc. Math.*, fasc. III, 1925, p. 3 et suiv.).

solution. Dans le cas du système (2), on peut se donner arbitrairement en un point les valeurs de z, p, q : l'ordre du système (2) est égal à 3.

2° Les équations (2) sont *linéaires :* elles donnent r, s, t comme fonctions linéaires et homogènes de z, p, q, les coefficients étant des fonctions rationnelles de x et de y. Il s'ensuit que, z_1, z_2, z_3 étant trois solutions linéairement indépendantes, la combinaison

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$$

est encore une solution, quelles que soient les constantes C_1, C_2, C_3. Montrons que, réciproquement, toute solution peut se mettre sous cette forme.

Soient, en effet, d'une manière générale,

$$(3) \qquad \begin{cases} r = R_1(x, y)p + R_2(x, y)q + R_3(x, y)z, \\ s = S_1(x, y)p + S_2(x, y)q + S_3(x, y)z, \\ t = T_1(x, y)p + T_2(x, y)q + T_3(x, y)z, \end{cases}$$

trois équations linéaires, à coefficients rationnels, complètement intégrables. Les conditions d'intégrabilité $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}$, $\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}$ entraînent, en particulier, comme on s'en rend aisément compte,

$$(4) \qquad \frac{\partial(R_1 + S_2)}{\partial y} = \frac{\partial(S_1 + T_2)}{\partial x}.$$

Or, $p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, q_3$ désignant les dérivées premières de z_1, z_2, z_3, posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}.$$

En dérivant Δ par rapport à x et à y, on a, compte tenu de (3),

$$(5) \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial x} = (R_1 + S_2)\Delta, \qquad \frac{\partial \Delta}{\partial y} = (S_1 + T_2)\Delta.$$

La relation (4) assure l'intégrabilité complète du système (5). Celui-ci s'intègre alors immédiatement et donne

$$(6) \qquad \Delta = \Delta_0 \, e^{\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (R_1 + S_2)\,dx + (S_1 + T_2)\,dy}.$$

Si l'on appelle *points singuliers* du système (3) les points singuliers de ses coefficients, la formule (6) montre que Δ ne s'annule jamais en un point ordinaire, à moins de s'évanouir identiquement. Dès lors, en tout point ordinaire, on peut disposer des constantes C_1, C_2, C_3 pour faire prendre à la solution $C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$ et à ses dérivées premières trois valeurs arbitrairement données. On obtiendra ainsi toutes les solutions.

3° Les points singuliers du système (3) sont les seuls points singuliers possibles de ses solutions. Cette propriété fondamentale découle des démonstrations classiques par lesquelles on établit l'existence même de ces solutions. Tirons-en tout de suite les conséquences suivantes :

$z(x, y)$ étant une solution de (3) déterminée par sa valeur et celle de ses dérivées premières en un point ordinaire (x_0, y_0), soit (x_1, y_1) un autre point ordinaire. La valeur de $z(x_1, y_1)$ dépend du chemin continu par lequel on va du point (x_0, y_0) au point (x_1, y_1) sans passer par aucun point singulier; mais deux chemins semblables qu'on peut ramener l'un à l'autre par variation continue, sans passer par aucun point singulier, donnent la même valeur $z(x_1, y_1)$.

Les points (x_0, y_0) et (x_1, y_1) peuvent, en particulier, se confondre. Un tel chemin qu'on peut qualifier de *fermé*, ne ramène pas nécessairement z à sa valeur initiale; il fait alors passer d'une détermination de z à une autre. Étant données trois solutions fondamentales z_1, z_2, z_3, le parcours d'un chemin fermé conduit ainsi à trois autres solutions Z_1, Z_2, Z_3, combinaisons linéaires, d'après 2°, de z_1, z_2, z_3. On peut donc écrire

$$(7) \qquad \begin{cases} Z_1 = C_{11} z_1 + C_{12} z_2 + C_{13} z_3, \\ Z_2 = C_{21} z_1 + C_{22} z_2 + C_{23} z_3, \\ Z_3 = C_{31} z_1 + C_{32} z_2 + C_{33} z_3. \end{cases}$$

Les substitutions linéaires qui correspondent ainsi aux divers chemins fermés forment ce qu'on appelle le *groupe de monodronie*.

2. Espace des variables et espace des fonctions. — Deux espaces projectifs à deux dimensions complexes vont nous occuper successivement. Le premier, l'espace des variables, est celui où sont représentées les variables indépendantes x, y : ses deux plans coordonnés sont les plans de Cauchy dont x et y sont respectivement les affixes complexes. A cet espace nous en adjoindrons un autre, celui des fonctions, dans lequel nous regarderons comme coordonnées homogènes trois solutions fondamentales du système (2).

Nous n'envisagerons tout d'abord que le premier.

3. Nature de l'espace utilisé. — L'espace projectif à deux dimensions complexes n'est pas l'espace projectif à quatre dimensions réelles : il en diffère par le fait qu'on y groupe les quatre variables réelles u_1, v_1, u_2, v_2 en deux couples en posant

$$(8) \qquad x = u_1 + iv_1, \qquad y = u_2 + iv_2.$$

Une certaine dissymétrie en résulte pour les quatre variables réelles. Si, par exemple, on appelle plan l'ensemble des points dont les coordonnées réelles vérifient deux équations réelles du premier degré, il y aura lieu de distinguer,

parmi les plans, ceux pour lesquels ces deux équations peuvent être remplacées par une seule en variables complexes

$$Ax + By + C = 0,$$

A, B, C étant des nombres complexes. Ce sont ce que nous appellerons, d'après M. H. Cartan, les *plans analytiques*. Le plan $v_1 = v_2 = 0$, par exemple, n'est pas analytique.

Une autre conséquence du remplacement des quatre coordonnées réelles par deux complexes concerne les points à l'infini. Ceux-ci, en effet, se distinguent les uns des autres, non par les valeurs des rapports $u_1 : v_1 : u_2 : v_2$ comme dans l'espace projectif à quatre dimensions réelles, mais par celles d'un seul rapport complexe

$$x : y = (u_1 + iv_1) : (u_2 + iv_2).$$

Il y a ainsi à l'infini une infinité double, et non triple, de points.

Pour définir rigoureusement les points à l'infini, utilisons les coordonnées homogènes en posant

$$x = \frac{X}{T}, \qquad y = \frac{Y}{T}, \tag{9}$$

X, Y, T sont trois nombres complexes, jamais nuls simultanément, dont les rapports mutuels déterminent la position d'un point; un point pour lequel on a $T = 0$ sera, par définition, à l'infini. Toute équation homogène et du premier degré en X, Y, T étant regardée comme définissant un plan analytique, l'ensemble des points à l'infini est un plan analytique.

Une *transformation homographique* de l'espace projectif à deux dimensions complexes est une substitution linéaire de la forme

$$\left\{\begin{aligned} X' &= a_1 X + b_1 Y + c_1 T, \\ Y' &= a_2 X + b_2 Y + c_2 T, \\ T' &= a_3 X + b_3 Y + c_3 T. \end{aligned}\right. \tag{10}$$

Elle fait correspondre à tout plan analytique, y compris celui de l'infini, un autre plan analytique.

4. Plans analytiques singuliers. — Un système d'équations linéaires aux dérivées partielles complètement intégrable, tel le système (2) ou, plus généralement, le système (3), présente, par rapport aux équations différentielles linéaires ordinaires, la nouveauté suivante : ses points singuliers, au lieu d'être des points isolés, forment des continus, variétés algébriques, chacune d'elles vérifiant une équation algébrique irréductible. On obtient ces *variétés singulières* en égalant à zéro chacun des polynomes irréductibles qui figurent au dénominateur dans les fonctions rationnelles R_1, R_2, R_3, S_1, ..., T_3; il y aura autant de variétés singulières que de tels polynomes, variétés auxquelles il convient d'ajouter, quand il le faut, le plan analytique de l'infini.

Sans nous étendre sur ce qu'on doit entendre par un point ordinaire ou singulier à l'infini, bornons-nous à remarquer que, pour notre but actuel, qui est de réduire les uns aux autres, par variation continue, les divers chemins fermés générateurs du groupe de monodromie, nous pouvons compter *a priori* le plan analytique de l'infini parmi les variétés singulières, nous interdisant, par conséquent, de le traverser : les résultats ainsi obtenus vaudront, il est clair, quel que soit le comportement à l'infini du système (2) ou (3).

Les variétés singulières du système (2) se déterminent immédiatement. Pour résoudre ce système par rapport à r, s, t, on n'a qu'à tirer s de la troisième équation; on porte ensuite l'expression de s ainsi obtenue dans les deux premières équations, qui permettent alors de calculer r et t. On voit que les seuls points singuliers du système (2) à distance finie sont ceux dont les coordonnées annulent un des cinq polynomes du premier degré :

$$x, \quad x-1, \quad y, \quad y-1, \quad y-x.$$

On a ainsi cinq plans analytiques, six avec celui de l'infini.

Avec les coordonnées homogènes, nous écrirons leurs six équations

$$(11) \qquad \begin{cases} X=0, & Y=0, & T=0, \\ Y=T, & T=X, & X=Y. \end{cases}$$

Deux plans analytiques n'ayant, à moins de se confondre, qu'un seul point commun, les six plans singuliers se trouvent situés les uns par rapport aux autres d'une manière particulière : les trois plans $X=0$, $Y=0$, $X=Y$, par exemple, passent par le même point $X=Y=0$. Il y a quatre points de la sorte, à savoir

$$(12) \qquad \begin{cases} X=Y=0, & X=T=0, \\ Y=T=0, & X=Y=T, \end{cases}$$

Cette seule propriété suffit à caractériser projectivement les six plans. En effet, étant donné dans l'espace à deux dimensions complexes quatre points A, B, C, D, linéairement indépendants trois à trois, deux de ces points déterminent un plan analytique; il y aura six plans ainsi déterminés : AB, AC, AD, BC, BD, CD. Pour ramener ces plans aux plans (11), il suffit d'une transformation homographique faisant correspondre aux points A, B, C, D les points (12), ce qui est possible effectivement. En effet, *il existe une transformation homographique, et une seule, faisant correspondre à quatre points donnés, linéairement indépendants trois à trois, quatre autres semblables également donnés.* La démonstration classique de ce théorème pour les variables réelles reste valable pour les variables complexes.

5. Hypercônes hermitiens. — Les six plans analytiques singuliers, avec la propriété projective particulière que nous venons de leur reconnaître, jouent, pour le système (2), le même rôle que les trois points singuliers 0, 1, ∞, pour

une équation différentielle de Gauss. Les solutions de celle-ci n'étant pas uniformes, on aborde leur étude en traçant, dans le plan de Cauchy, des coupures appropriées. Le plus simple est de prendre l'axe réel que les trois points 0, 1, ∞ divisent en trois segments; tout chemin fermé ne passant par aucun point singulier traverse ces segments un certain nombre de fois dans un ordre déterminé; ce nombre et cet ordre le qualifient alors complètement.

Les valeurs particulières, 0, 1, ∞, des points singuliers ne restreignent pas la généralité de la méthode : on passe au cas général par une simple transformation homographique, l'axe réel devenant une circonférence.

Guidés par cet exemple classique, cherchons de même, dans l'espace à deux dimensions complexes, des hypersurfaces simples, à trois dimensions réelles, portant sur elles les six plans singuliers. Prenons l'hypersurface qu'on obtient en ne donnant à y, par exemple, que des valeurs réelles. Son équation en coordonnées homogènes consiste à égaler le rapport $Y:T$ à son conjugué; on peut l'écrire

$$YT - TY = 0,$$

ou mieux, pour avoir au premier membre une forme d'Hermite,

$$i(\overline{Y}T - \overline{T}Y) = 0. \tag{13}$$

Nous appellerons *hypersurface hermitienne* l'ensemble des points dont les coordonnées homogènes annulent une forme d'Hermite. L'hypersurface (13), qui est hermitienne, porte sur elle trois des six plans singuliers, à savoir :

$$Y = 0, \qquad T = 0, \qquad Y = T, \tag{14}$$

propriété qui la détermine réciproquement. Soit, en effet, $H(X, Y, T)$ une forme d'Hermite définissant une hypersurface hermitienne. Pour s'annuler avec Y, quelles que soient les valeurs de X et de T, elle ne doit contenir que des termes pourvus du facteur Y ou $\overline{Y}$. En raisonnant de même avec le plan $T = 0$, les termes en $\overline{Y}T$ et en $\overline{T}Y$ étant alors les seuls restants, on a

$$H = h\overline{Y}T + \overline{h}\overline{T}Y. \tag{15}$$

En faisant ensuite $Y = T$, $H = 0$, on trouve

$$h = -\overline{h} = ki \qquad (k \text{ réel})$$

ce qui ramène (15) à (13).

Les trois plans singuliers (14) ne sont pas les seuls plans analytiques de l'hypersurface (13) : tous les plans de la forme

$$Y = \lambda T \qquad (\lambda \text{ réel})$$

lui appartiennent également. Une hypersurface hermitienne engendrée ainsi par une infinité simple de plans analytiques issus d'un point fixe peut être appelée un *hypercône hermitien;* le point fixe sera son *sommet. Tout hypercône hermitien est déterminé par trois quelconques de ses plans analytiques générateurs.*

Le sommet de l'hypercône (13) n'est autre que le point $Y = T = 0$, un des quatre points triplement singuliers du système (2). Les trois autres de ces points sont les sommets de trois autres hypercônes obtenus de la même manière. Nous avons ainsi quatre hypercônes hermitiens; nous écrirons leurs équations, suivant l'ordre des quatre points (12),

$$(16)\qquad \begin{cases} i(YT - \bar{T}Y) = 0, \quad i(TX - XT) = 0, \quad i(XY - \bar{Y}X) = 0, \\ i(\bar{Y}T - \bar{T}Y) + i(\bar{T}X - XT) + i(XY - \bar{Y}X) = 0. \end{cases}$$

On vérifie sans peine la dernière de ces équations : l'hypersurface qu'elle représente porte bien sur elle les plans $Y = T$, $T = X$, $X = Y$.

Les quatre hypercônes (16) ont en commun l'ensemble des points réels, ensemble que l'on désigne par le nom de *sous-espace réel*, ou de *chaîne planaire réelle* en appelant *chaînes planaires* les variétés, à deux dimensions réelles, transformées homographiques du sous-espace réel. *Une chaîne planaire est déterminée par quatre de ses points, linéairement indépendants trois à trois.* En effet, quatre points semblables étant donnés, une transformation homographique les ramène à quatre points réels; la chaîne réelle est bien la seule chaîne planaire qui passe par ces derniers points.

Un hypercône hermitien étant donné, prenons sur trois de ses plans analytiques générateurs trois points respectifs linéairement indépendants. Ces points formant avec le sommet quatre points linéairement indépendants trois à trois, *la chaîne planaire qu'ils déterminent ainsi appartient tout entière à l'hypercône hermitien.* Cette propriété résulte, par simple transformation homographique, de ce que nous savons des hypercônes (16).

Chacune des chaînes planaires ainsi obtenues possède en outre la propriété suivante, également évidente : un plan analytique passant par le sommet de l'hypercône hermitien n'ayant avec elle, en général, aucun autre point commun que ce sommet, tout plan analytique générateur, par contre, la rencontre suivant une *chaîne linéaire*, transformée homographique d'une droite réelle.

Cette dernière remarque permet de construire un hypercône hermitien ou, ce qui revient au même, les plans analytiques qui l'engendrent, connaissant son sommet et une chaîne planaire, passant par ce sommet, lui appartenant entièrement. On trouve ainsi, par exemple, les plans analytiques générateurs du dernier des hypercônes (16) : ils ont pour équation

$$Y - T = \lambda(X - T) \qquad (\lambda \text{ réel}).$$

6. Les quatorze régions. — Les quatre hypercônes (16) partagent l'espace en quatorze régions, obtenues en remplaçant les signes $=$ des équations (16) par les signes $<$ ou $>$. On doit évidemment exclure deux des seize combinaisons

possibles, car on ne peut avoir ni

$$i(\bar{Y}T - \bar{T}Y) < 0, \qquad i(\bar{T}X - \bar{X}T) < 0, \qquad i(\bar{X}Y - \bar{Y}X) < 0,$$
$$i(\bar{Y}T - TY) + i(TX - \bar{X}T) + i(XY - \bar{Y}X) > 0;$$

ni la combinaison entièrement opposée.

Pour étudier rigoureusement ce partage de l'espace, il est plus simple de reprendre les coordonnées x, y de la formule (8). Grâce aux variables réelles u_1, v_1, u_2, v_2, les équations (16) deviennent, à l'ordre près,

$$(17) \qquad v_1 = 0, \qquad v_2 = 0, \qquad u_2 v_1 - u_1 v_2 = 0, \qquad (u_2 - 1)v_1 - (u_1 - 1)v_2 = 0.$$

En posant

$$(18) \qquad w_1 = u_2 v_1 - u_1 v_2, \qquad w_2 = (u_2 - 1)v_1 - (u_1 - 1)v_2,$$

on a

$$(19) \qquad w_1 - w_2 = v_1 - v_2.$$

Il est clair que, pour $v_1 > 0$, $v_2 < 0$,

$$w_1 < 0 \quad \text{entraîne} \quad w_2 < 0;$$
$$w_2 > 0 \quad \text{entraîne} \quad w_1 > 0;$$

et que, pour $v_1 < 0$, $v_2 > 0$,

$$w_1 > 0 \quad \text{entraîne} \quad w_2 > 0;$$
$$w_2 < 0 \quad \text{entraîne} \quad w_1 < 0.$$

De même, pour $w_1 > 0$, $w_2 < 0$,

$$v_1 < 0 \quad \text{entraîne} \quad v_2 < 0;$$
$$v_2 > 0 \quad \text{entraîne} \quad v_1 > 0;$$

pour $w_1 < 0$, $w_2 > 0$,

$$v_1 > 0 \quad \text{entraîne} \quad v_2 > 0;$$
$$v_2 < 0 \quad \text{entraîne} \quad v_1 < 0.$$

Dès lors, des quatorze régions considérées, les unes, définies par quatre inégalités, seront limitées par quatre hyperfaces; les autres n'en auront que trois.

On a ainsi six régions à quatre hyperfaces, à savoir :

1. $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, $w_1 > 0$, $w_2 > 0$;
2. $v_1 < 0$, $v_2 < 0$, $w_1 < 0$, $w_2 < 0$;
3. $v_1 < 0$, $v_2 < 0$, $w_1 > 0$, $w_2 > 0$;
4. $v_1 > 0$, $v_2 > 0$, $w_1 < 0$, $w_2 < 0$;
5. $v_1 > 0$, $v_2 < 0$, $w_1 > 0$, $w_2 < 0$;
6. $v_1 < 0$, $v_2 > 0$, $w_1 < 0$, $w_2 > 0$;

et huit régions à trois hyperfaces :

7.	$v_1 > 0,$	$v_2 < 0,$	$w_2 > 0;$
8.	$v_1 < 0,$	$v_2 > 0,$	$w_2 < 0;$
9.	$v_1 > 0,$	$v_2 < 0,$	$w_1 < 0;$
10.	$v_1 < 0,$	$v_2 > 0,$	$w_1 > 0;$
11.	$v_1 > 0,$	$w_1 < 0,$	$w_2 > 0;$
12.	$v_1 < 0,$	$w_2 > 0,$	$w_2 < 0;$
13.	$v_2 < 0,$	$w_1 < 0,$	$w_2 > 0;$
14.	$v_2 > 0,$	$w_1 > 0,$	$w_2 < 0.$

Il n'est pas difficile de trouver, dans un espace à moins de dimensions, une image de ce partage en régions. Considérons, en effet, dans l'espace à trois dimensions réelles, un tétraèdre régulier ABCD; menons de son centre O, perpendiculairement aux droites OA, OB, OC, OD, quatre plans P, Q, R, S. Ceux-ci, ayant le point O en commun, ne sont linéairement indépendants que trois à trois; il existera une relation linéaire entre les premiers membres de leurs équations, relation qu'on peut supposer avoir exactement la forme (19). Il en résultera, par les plans P, Q, R, S, un partage de l'espace à trois dimensions réelles en quatorze régions, image fidèle de notre partage de l'espace à deux dimensions complexes.

La projection stéréographique d'une sphère de centre O, fera passer de cette image à une autre plus simple encore. Elle fait correspondre, en effet, aux plans P, Q, R, S, quatre cercles d'un même plan de Cauchy. Nous avons ainsi l'image suivante :

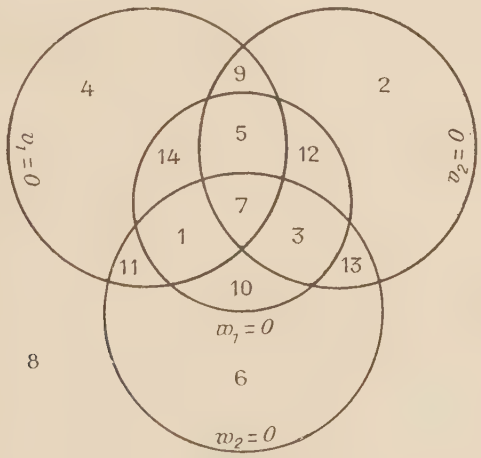

Fig. 1.

Les quatre cercles représentant les quatre hypercônes, les six quadrilatères et les huit triangles d'arcs de cercle représentent respectivement les quatorze régions. *La chaîne réelle, qui est une hyperarête commune à ces régions, n'est pas*

représentée; c'est pourquoi notre image n'est pas topologiquement parfaite. Les autres hyperarêtes sont des demi-plans : la région 1, par exemple, a pour hyperarêtes, outre la chaîne réelle, quatre demi-plans dont trois, à savoir

$$x = 0, \qquad v_2 > 0; \qquad y = 1, \qquad v_1 > 0; \qquad x = y, \qquad v_1 = v_2 > 0,$$

sont seuls à distance finie. Les douze moitiés ainsi obtenues des six plans singuliers trouvent leurs images dans les douze points d'intersection des cercles utilisés.

7. Nature topologique des régions. — Un domaine à plus de deux dimensions réelles est dit *connexe* lorsqu'on peut joindre deux quelconques de ses points par un chemin continu; il sera *simplement connexe* si deux chemins quelconques se ramènent l'un à l'autre par variation continue, sans sortir du domaine.

Chacune de nos quatorze régions et chacune de leurs hyperfaces sont simplement connexes.

Pour le voir, remarquons la situation particulière dans laquelle se trouvent les quatorze régions, ainsi que leurs hyperfaces, par rapport à la chaîne réelle : les inégalités et les équations qui les définissent ne cessent point d'être vérifiées lorsqu'on multiplie v_1 et v_2 par un même nombre positif. Ajoutons que la multiplication de ces mêmes variables par un nombre négatif fait passer des sept régions de numéro impair à celles de numéro pair et *vice versa*.

Dès lors, il est clair que les régions et les hyperfaces seront simplement connexes ou non en même temps que leurs sections par un sous-espace de la forme $v_1 = \text{const.}$, soit, pour fixer les idées, $v_1 = 1$.

Ce sous-espace n'ayant que trois dimensions réelles, on le représentera sans difficulté, à l'aide de trois axes rectangulaires portant respectivement les valeurs de u_1, de u_2 et de v_2. Les surfaces d'équations

$$v_2 = 0, \qquad u_2 = u_1 v_2, \qquad u_2 - 1 = (u_1 - 1) v_2,$$

qui sont un plan et deux paraboloïdes hyperboliques, le partagent en sept régions. Tout plan horizontal, de cote v_2, coupe, en effet, les paraboloïdes suivant deux droites parallèles qui ne se confondent que pour $v_2 = 1$. On aura donc trois régions au-dessous du plan $u_1 O u_2$, une intérieure aux deux paraboloïdes et deux extérieures. Au-dessus du plan $u_1 O u_2$, la partie intérieure aux paraboloïdes se divise en deux par la droite $v_2 = 1$, $u_2 = u_1$, ce qui fera, avec deux extérieures, quatre régions.

Ces sept régions, ainsi que leurs faces tant planes que paraboloïdales, sont bien simplement connexes, ce qui établit la proposition en vue.

8. Réduction des chemins généraux. — Tout chemin continu ne traversant ni les six plans singuliers ni la chaîne réelle se caractérise par les régions par lesquelles il passe successivement : deux chemins continus passant par les

mêmes régions se ramènent l'un à l'autre par variation continue, les plans singuliers et la chaîne réelle restant interdits. En effet, deux régions consécutives quelconques sont séparées l'une de l'autre par une hyperface déterminée; il s'ensuit que les deux chemins continus entrent dans une région et en sortent par les mêmes hyperfaces; dès lors, grâce au théorème du paragraphe précédent, on peut ramener les chemins l'un à l'autre, de région en région.

Pour abréger, qualifions de *généraux* les chemins continus qui ne traversent ni les plans singuliers ni la chaîne réelle; les chemins *spéciaux* seront ceux qui, sans traverser les plans singuliers, contiennent des points réels.

La réduction des chemins généraux peut être obtenue par l'emploi de l'image du paragraphe 6 : les douze points d'intersection étant interdits, les lignes continues du plan de l'image représentent les chemins généraux; *les mêmes suites de régions caractérisent ceux-ci et celles-là.* A deux lignes réductibles l'une à l'autre sur le plan de Cauchy correspondront, dans l'espace à deux dimensions complexes, deux chemins réductibles. Par contre, les chemins spéciaux n'étant pas représentés, il peut correspondre à deux lignes irréductibles de l'image deux chemins généraux qu'on ramène l'un à l'autre par variation continue, moyennant certains chemins spéciaux intermédiaires.

Montrons, en effet, que *deux chemins tels que* (1, 7, 5, 9, 2) *et* (1, 10, 6, 8, 2), *qui ont pour images deux lignes irréductibles, sont réductibles l'un à l'autre, les plans singuliers étant seuls interdits.*

Considérons le plan non analytique obtenu en égalant u_1, u_2 à deux constantes, la première inférieure à 0 et la deuxième supérieure à 1, soit, pour fixer les idées, $u_1 = -1$, $u_2 = 2$. Ce plan ne rencontre les plans singuliers en aucun point à distance finie; il rencontre les quatre hypercônes suivant quatre droites. Chaque point du plan étant déterminé par les valeurs de v_1, v_2, les quatre droites ont pour équations

$$v_1 = 0, \qquad v_2 = 0, \qquad v_2 = -2v_1, \qquad v_2 = -\frac{1}{2}v_1.$$

Ces droites partagent le plan en huit parties. Celles des quatorze régions auxquelles ces parties appartiennent respectivement se déterminent sans diffi-

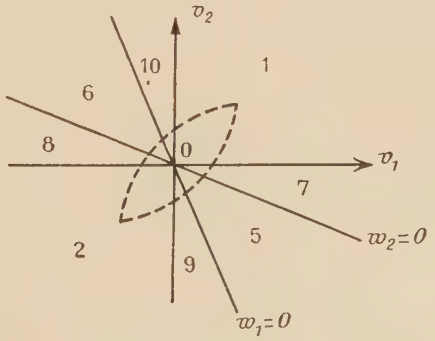

Fig. 2.

culté : le premier quadrant du plan appartient à la région 1, les quantités v_1, v_2, w_1, w_2 étant évidemment positives; en franchissant ensuite la demi-droite $v_2 = 0$, $v_1 > 0$, on passe à la région 7, v_2 ayant seul changé de signe; on continuera ainsi de suite. On aura ainsi la figure 2 ci-dessus.

En ramenant dans le plan les chemins (1, 7, 5, 9, 2) et (1, 10, 6, 8, 2), il est clair qu'on peut, sans sortir du plan, les réduire l'un à l'autre.

On exprime le même résultat en disant que *le chemin fermé* (1, 7, 5, 9, 2, 8, 6, 10, 1) *se réduit, par variation continue, à un point ordinaire.*

9. Demi-domaine fondamental. — Sept des quatorze régions résultent des sept autres par simple changement de signe des variables v_1 et v_2. On peut toujours les choisir de manière à obtenir, par leur réunion, un domaine simplement connexe. Partons, par exemple, de la région 7, à trois hyperfaces; joignons-lui les trois régions à quatre hyperfaces qui lui sont contiguës, 1, 3 et 5, puis les trois régions à trois hyperfaces, contiguës respectivement à celles-ci, qui n'ont avec 7 aucune hyperarête commune autre que la chaîne réelle : 11, 13, 9. Ces sept régions forment ensemble un domaine dont la connexion simple résulte de celle, évidente, de son image :

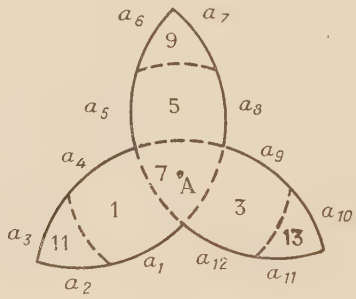

Fig. 3.

Symétrique de son complémentaire par rapport à la chaîne réelle, ce domaine, véritable généralisation du demi-plan supérieur de la théorie des fonctions de Schwarz, peut être appelé *demi-domaine fondamental*; nous le désignerons par (Δ). Considérons l'hypersurface qui le limite; les douze moitiés des plans singuliers, jointes à la chaîne réelle, la divisent en douze hyperfaces que nous désignerons par a_i ($i = 1, 2, \ldots, 12$). Un point fixe A étant choisi dans la région 7, tout chemin général fermé, partant de A et y revenant, franchit ces hyperfaces un certain nombre de fois dans un certain ordre; on pourra le désigner par un symbole de la forme

$$a_i^{\pm} a_j^{\pm} a_k^{\pm} a_l^{\pm} \ldots a_p^{\pm} a_q,$$

le franchissement d'une hyperface étant marqué du signe + s'il fait sortir de (Δ), et du signe — s'il y fait entrer. Le même symbole désignera la substi-

tution correspondante du groupe de monodromie. On voit que les substitutions $a_1^+ a_2^-$, $a_2^+ a_3^-$, ..., $a_{12}^+ a_1^-$ engendrent toutes les autres.

Pour un chemin spécial, on peut toujours le ramener, par variation continue, à un chemin général voisin.

On a évidemment

$$(a_1^+ a_2^-)(a_2^+ a_3^-) \ldots (a_{12}^+ a_1^-) = 1;$$

mais il existe d'autres relations entre les substitutions $a_i^+ a_{i+1}^-$. Le chemin (1, 7, 5, 9, 2, 8, 6, 10, 1) du paragraphe précédent se désigne, en effet, par le symbole $a_7^+ a_1^-$. On a donc

$$a_7^+ a_1^- = a_1^+ a_7^- = 1.$$

On a de même

$$a_8^+ a_2^- = a_2^+ a_8^- = 1.$$

Il en résulte

$$a_7^+ a_8^- = a_1^+ a_7^- a_7^+ a_8^- a_8^+ a_2^- = a_1^+ a_2^-.$$

Six des douze substitutions $a_1^+ a_2^-$, $a_2^+ a_3^-$, ..., $a_{12}^+ a_1^-$ reproduisent ainsi les six autres. On en conclut que *cinq substitutions fondamentales,*

$$a_1^+ a_2^-, \quad a_2^+ a_3^-, \quad a_3^+ a_4^-, \quad a_4^+ a_5^-, \quad a_5^+ a_6^-,$$

suffisent à engendrer le groupe de monodromie.

10. Équations différentielles de Fuchs. — Soit $z(x, y)$ une solution du système (2); en y faisant

$$x = \xi(t), \qquad y = \eta(t), \tag{20}$$

où ξ, η sont deux fonctions rationnelles, on obtient une fonction de t, solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients rationnels.

En effet, en posant

$$\frac{d\xi}{dt} = \xi', \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2} = \xi'', \qquad \frac{d^3\xi}{dt^3} = \xi''',$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \eta', \qquad \frac{d^2\eta}{dt^2} = \eta'', \qquad \frac{d^3\eta}{dt^3} = \eta''',$$

nous avons

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= p\xi' + q\eta', \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= r\xi'^2 + 2s\xi'\eta' + t\eta'^2 + p\xi'' + q\eta'', \\ \frac{d^3z}{dt^3} &= \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\xi'^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}\xi'^2\eta' + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}\xi'\eta'^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}\eta'^3 \\ &\quad + 3[r\xi'\xi'' + s(\eta'\xi'' + \xi'\eta'') + t\eta'\eta''] + p\xi''' + q\eta'''. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

Le système (2) permet de calculer, en fonctions linéaires de z, p, q, les dérivées r, s, t, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\,\partial y}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}$. En portant ces valeurs dans les rela-

tions (21), on obtiendra, par élimination de p et q,

$$\frac{d^3 z}{dt^3} + f_1(t)\frac{d^2 z}{dt^2} + f_2(t)\frac{dz}{dt} + f_3(t) z = 0, \tag{22}$$

les fonctions $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ étant rationnelles.

On sait que Fuchs ([5]) distingue, parmi les équations différentielles linéaires à coefficients rationnels, celles dont les solutions admettent la propriété suivante : *chacune de ces solutions, rendue uniforme par des coupures convenables, possède en chacun des points singuliers une valeur limite déterminée, finie ou infinie.* Le « théorème de Fuchs » donne la forme caractéristique de ces équations. Pour l'équation (22), ses diverses solutions s'expriment simplement à l'aide d'intégrales eulériennes, obtenues en portant dans (1) les valeurs (20); ses points singuliers correspondent aux valeurs de t pour lesquelles deux des quatre facteurs sous le signe $\int$ viennent à se confondre. En chacun de ces points, les intégrales eulériennes possèdent bien, d'après un calcul simple, rendu classique par la théorie des fonctions hypergéométriques d'une variable, des valeurs limites déterminées. L'équation (22) appartient donc à la classe de Fuchs.

Mais il y a plus. Les formules (20) font correspondre à toute ligne fermée du plan t, qui ne passe par aucun point singulier, un chemin fermé de l'espace à deux dimensions complexes; il en résulte que les solutions de (22) se transforment les unes dans les autres par les mêmes substitutions que celles de (2); *le groupe de monodromie de* (2) *contiendra celui de* (22) *comme sous-groupe.*

On peut toujours choisir les fonctions rationnelles $\xi(t)$, $\eta(t)$ de manière à rendre identiques les deux groupes de monodromie. Pour l'établir rigoureusement, nous nous bornerons au cas où la surface représentée paramétriquement par les équations (20) se réduit à un plan analytique *réel* :

$$y = ax + b, \tag{23}$$

les constantes a et b étant réelles.

Un plan de la forme (23) rencontre la chaîne réelle suivant une droite réelle; celle-ci porte sur elle les points singuliers de l'équation de Fuchs correspondante, points d'intersection du plan (23) avec les six plans singuliers. Les chemins fermés du plan (23), générateurs du groupe de monodromie de l'équation de Fuchs, traversent nécessairement cette droite réelle et sont, par conséquent, des chemins spéciaux. Les substitutions correspondantes se détermineront sans difficulté, comme nous allons le voir, grâce au demi-domaine fondamental (Δ).

([5]) L. Fuchs, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit Veränderlichen Coefficienten* (*Journal de Crelle*, t. 66, p. 121 et suiv.).

11. Les sept espèces de plans analytiques réels. — Laisons d'abord de côté les plans analytiques réels qui passent par un des points (12) et qui engendrent, comme nous l'avons vu, les hypercônes (16). Tout autre plan analytique réel ne rencontre ces hypercônes que sur la chaîne réelle, suivant la droite réelle correspondante. Celle-ci le partage donc en deux moitiés dont chacune appartient tout entière à une seule des quatorze régions. Ces moitiés étant symétriques l'une de l'autre par rapport à la chaîne réelle, il en sera de même de leurs régions respectives. Aux sept groupes de deux régions ainsi obtenus correspondront sept espèces de plan analytiques réels : (1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 10), (11, 12), (13, 14).

Le demi-domaine fondamental (Δ) ayant été choisi comme nous l'avons fait, les plans (7, 8) apparaissent comme les plus simples : *les points singuliers de l'équation de Fuchs se suivent alors, sur la droite réelle, dans le même ordre que les plans singuliers sur l'hypersurface, frontière de* (Δ). Reportons-nous, en effet, à l'équation (23) qui s'écrit, avec les variables u_1, v_1, u_2, v_2,

$$u_2 + iv_2 = a(u_1 + iv_1) + b,$$

d'où

$$u_2 = au_1 + b, \qquad v_2 = av_1,$$

et, par conséquent,

$$w_1 = (au_1 + b)v_1 - u_1(av_1) = bv_1,$$
$$w_2 = (au_1 + b - 1)v_1 - (u_1 - 1)(av_1) = (a + b - 1)v_1.$$

On voit que les plans (7, 8) répondent aux valeurs suivantes de a et de b :

$$(24) \qquad a < 0, \qquad b > 0, \qquad a + b - 1 > 0.$$

Chaque point d'un plan (7, 8) pouvant être déterminé par les valeurs des coordonnées u_1, v_1, l'axe Ou_1 représente la droite réelle correspondante. Les cinq points singuliers à distance finie de l'équation de Fuchs ont pour affixes

$$x = 0, \quad 1, \quad \frac{b}{1-a}, \quad \frac{1-b}{a}, \quad \frac{-b}{a};$$

et l'on a, d'après (24),

$$1 < \frac{b}{1-a} < \frac{1-b}{a} < \frac{-b}{a},$$

ce qui conduit à la figure suivante :

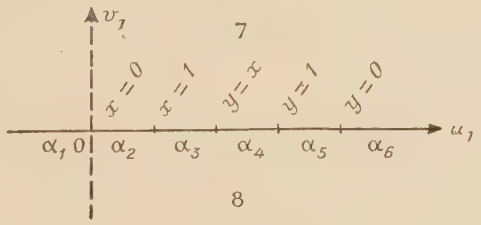

Fig. 4.

L'ordre des points singuliers est bien ici celui de la figure 3.

Désignons par $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, 6)$, les six segments de l'axe réel ainsi obtenus; les cinq substitutions

$$\alpha_1^+\alpha_2^-, \qquad \alpha_2^+\alpha_3^-, \qquad \alpha_3^+\alpha_4^-, \qquad \alpha_4^+\alpha_5^-, \qquad \alpha_5^+\alpha_6^-$$

engendreront le groupe de monodromie de l'équation de Fuchs. Pour les évaluer, regardons le plan (7, 8) comme limite du plan

$$(25) \qquad y = ax + b + i\varepsilon,$$

ε désignant un nombre positif petit. Ce dernier plan rencontre les quatre hypercônes suivant quatre droites : nous avons, d'après (25),

$$v_2 = av_1 + \varepsilon, \qquad w_1 = bv_1 - \varepsilon u_1, \qquad w_2 = (a + b - 1)v_1 - \varepsilon(u_1 - 1);$$

les quatre droites auront pour équations

$$v_1 = 0, \qquad v_1 = \frac{-\varepsilon}{a}, \qquad v_1 = \frac{\varepsilon}{b}u_1, \qquad v_1 = \frac{\varepsilon}{a + b - 1}(u_1 - 1),$$

partageant ainsi le plan (25) en dix régions comme le montre la figure 5 :

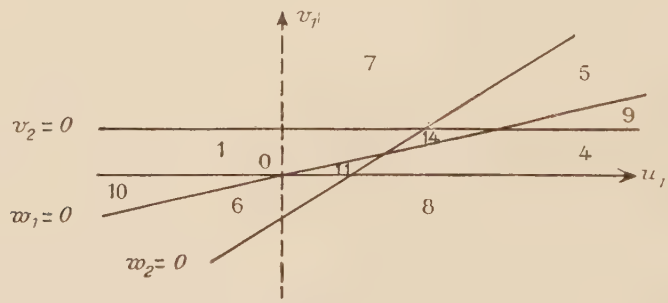

Fig. 5.

Les cinq points d'intersection, à distance finie, de ces droites donnant à la limite les cinq points singuliers de la figure 4, le chemin spécial $\alpha_1^+\alpha_2^-$, par exemple, résulte, par passage à la limite, du chemin général (7, 1, 10, 6, 11, 1, 7), ce qui n'est autre que $a_1^+ a_2^-$. On aura ainsi

$$(26) \qquad \alpha_1^+\alpha_2^- = a_1^+a_2^-, \qquad \alpha_2^+\alpha_3^- = a_2^+a_3^-, \qquad \ldots, \qquad \alpha_5^+\alpha_6^- = a_5^+a_6^-.$$

L'identité des deux groupes de monodromie est alors évidente.

12. Relations de permutabilité. — On examine de même les autres espèces de plans réels. Considérons en particulier les plans (5, 6) pour lesquels nous avons

$$a < 0, \qquad b > 0, \qquad a + b - 1 < 0.$$

Nous calculerons de deux manières différentes les substitutions fondamentales de l'équation de Fuchs correspondante : à l'équation (25), nous adjoindrons

celle obtenue en remplaçant ε par $-\varepsilon$. Nous obtenons ainsi par le même raisonnement que plus haut, les deux figures suivantes :

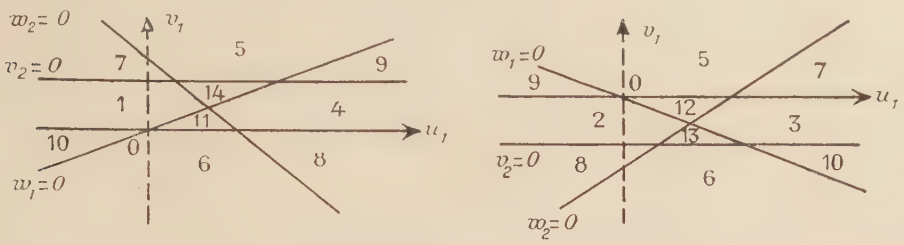

Fig. 6.

Utilisons d'abord la première de ces figures. Les cinq chemins généraux qui donnent à la limite les chemins spéciaux générateurs du groupe de monodromie de l'équation de Fuchs sont (5, 7, 1, 10, 6, 11, 1, 7, 5), (5, 7, 1, 14, 5), (5, 14, 1, 11, 4, 14, 5), (5, 14, 4, 11, 6, 8, 4, 14, 5), (5, 14, 4, 9, 5), ce qui conduit aux substitutions suivantes :

$$a_1^+ a_2^-, \quad a_4^+ a_5^-, \quad a_5^+ a_4^- a_3^+ a_5^-, \quad a_5^+ a_3^- a_2^+ a_5^-, \quad a_5^+ a_6^-.$$

La deuxième figure donne de même

$$a_1 a_2, \quad a_2^- a_5 a_4^- a_2^-, \quad a_2^- a_4 a_3^- a_2, \quad a_2^- a_3^-, \quad a_3^+ a_6.$$

Il en résultera, par simple identification,

$$(27) \qquad a_4^+ a_5^- = a_2^+ a_5^- a_4^+ a_2^-, \qquad a_5^+ a_3^- a_2^+ a_5^- = a_2^+ a_3^-,$$

$$(28) \qquad a_5^+ a_4^- a_3^+ a_5^- = a_2^+ a_4^- a_3^+ a_2^-.$$

On vérifie que la relation (28) est une conséquence des deux relations (27). Celles-ci s'écrivent

$$a_4^+ a_5 = (a_2^+ a_5^-)(a_5^+ a_4)(a_4^+ a_5^-)(a_4^+ a_5^-)(a_5^+ a_2^-),$$
$$(a_5^+ a_4^-)(a_4^+ a_5^-)(a_2^+ a_5^-)(a_5^+ a_4)(a_4^+ a_5^-) = a_2^+ a_3;$$

ou encore

$$(29) \qquad (a_2^+ a_5^-)(a_5^+ a_4^-)(a_4^+ a_5^-) = (a_4^+ a_5^-)(a_2^+ a_5^-)(a_5^+ a_4^-) = (a_5^+ a_4^-)(a_4^+ a_5^-)(a_2^+ a_5^-).$$

Dans la figure 6, la droite $w_2 = 0$ rencontre $v_2 = 0$ en un point d'abscisse positive; mais il peut arriver, sans qu'on sorte de l'espèce (5, 6), que ce point de rencontre soit d'abscisse négative. Dans ce dernier cas, la méthode d'identification employée donnera, pour le point singulier $x = 0$,

$$(a_5^+ a_4^-)(a_1^+ a_2^-)(a_4^+ a_5^-) = a_1^+ a_2^-.$$

On aura de même

$$a_5^+ a_6^- = (a_2^+ a_5^-)(a_5^+ a_6^-)(a_5^+ a_2^-).$$

Nous avons ainsi

$$(30) \qquad \begin{cases} (a_1^+ a_2^-)(a_4^+ a_5) = (a_4^+ a_5)(a_1^+ a_2^-), \\ (a_2^+ a_5)(a_5^+ a_6^-) = (a_5^+ a_6^-)(a_2^+ a_5^-). \end{cases}$$

Nous appellerons *relations de permutabilité* les relations (29), (30) et d'autres semblables. *Pour les obtenir, nous n'avons utilisé jusqu'ici que les variétés singulières.* Nous retrouverons ces relations au chapitre suivant, avec de nouvelles précisions, en faisant intervenir les constantes α, β, γ, δ.

En terminant ce premier chapitre, faisons remarquer que, en passant d'un plan (7, 8) à un plan (5, 6), une seule des six substitutions fondamentales de l'équation de Fuchs est changée; c'est celle relative au point singulier $y = x$: la substitution $a_3^+ a_4^-$ devient, d'après (28),

$$(a_3^- a_4)(a_3^+ a_4)(a_1^+ a_2) = (a_2^- a_3)(a_3 a_1)(a_3^- a_2).$$

Cette dernière substitution sera de même seule changée lorsqu'on passera de (5, 6) à (9, 10) : elle deviendra

$$(a_6^+ a_5^-)(a_5^+ a_4^-)(a_5^+ a_4^-)(a_4^+ a_3^-)(a_5^+ a_6^-) = (a_1^+ a_2^-)(a_2^+ a_3^-)(a_3^+ a_4^-)(a_3^+ a_2^-)(a_2^+ a_1^-).$$

On examinera de même le passage de (7, 8), soit à (1, 2) et à (11, 12), soit à (3, 4) et à (13, 14). On aura ainsi épuisé l'examen des sept espèces.

Pour les plans réels qui passent par un des points (12) et que nous avons laissés de côté, on les obtiendra comme cas limites, intermédiaires de deux espèces voisines.

CHAPITRE II.

Les douze intégrales.

1. Chemins d'intégration de l'intégrale (1). — Nous avons indiqué au chapitre I (§ 1) les deux définitions équivalentes de la fonction hypergéométrique de deux variables considérée, à savoir l'intégrale (1), *étendue à certaines lignes fermées*, et le système (2) qu'elle vérifie. La nature de ces lignes fermées se détermine de la manière suivante :

Considérant le plan de Cauchy dont la variable u est l'affixe complexe, nous nous bornerons aux lignes fermées de ce plan qui ne passent par aucun des points

$$u = 0, \quad 1, \quad x, \quad y, \quad \infty,$$

points singuliers de la fonction

$$G(u) = u^\alpha (u-1)^\beta (u-x)^\gamma (u-y)^\delta. \tag{31}$$

Soit (C) une telle ligne fermée; peut-on la choisir de telle manière que l'intégrale $\int_{(C)} G(u)\,du$, considérée comme fonction de x et de y, satisfasse au système (2)?

Posons, pour abréger,

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\} = \int_{(C)} G(u)\,du = \int_{(C)} u^\alpha (u-1)^\beta (u-x)^\gamma (u-y)^\delta\,du;$$

les dérivées successives de cette intégrale par rapport à x, y auront pour expressions, à des facteurs constants près, des symboles analogues où, au lieu de γ, δ, on aura $\gamma-1$, $\delta-1$, $\gamma-2$, $\delta-2$, ...

Nous avons donc à porter, dans le système (2), les valeurs suivantes :

$$(32)\qquad \begin{cases} z=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}, \\ p=-\gamma\{\alpha,\beta,\gamma-1,\delta\}, \qquad q=-\delta\{\alpha,\beta,\gamma,\delta-1\}, \\ r=\gamma(\gamma-1)\{\alpha,\beta,\gamma-2,\delta\}, \qquad s=\gamma\delta\{\alpha,\beta,\gamma-1,\delta-1\}, \\ \qquad t=\delta(\delta-1)\{\alpha,\beta,\gamma,\delta-2\}. \end{cases}$$

Prenons par exemple la première équation du système (2) que nous écrirons $A(z)=0$ en posant

$$\begin{aligned} A(z)=x(x-1)r+y(y-1)s \\ +[(\alpha+\beta+2\gamma+\delta)x+\delta y-(\alpha+\gamma+\delta)]p+\gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)z. \end{aligned}$$

En y portant les valeurs (32), nous faisons entrer les coefficients de r, de s et de p sous les signes $\int$, et nous tenons compte des identités

$$\begin{gathered} x=u-(u-x), \qquad x-1=(u-1)-(u-x), \\ y=u-(u-y), \qquad y-1=(u-1)-(u-y), \\ 1=u-(u-1). \end{gathered}$$

Nous obtenons ainsi, après simplification, et quelle que soit la ligne (C),

$$\begin{aligned} A(\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\})&=\gamma(\alpha+1)\{\alpha,\beta+1,\gamma-1,\delta\}+\gamma(\beta+1)\{\alpha+1,\beta,\gamma-1,\delta\} \\ &\quad+\gamma(\gamma-1)\{\alpha+1,\beta+1,\gamma-2,\delta\}+\gamma\delta\{\alpha+1,\beta+1,\gamma-1,\delta-1\} \\ &=\gamma[u^{\alpha+1}(u-1)^{\beta+1}(u-x)^{\gamma-1}(u-y)^{\delta}]_{(C)}. \end{aligned}$$

Ce dernier membre est donc à égaler à zéro.

Nous avons une autre condition, semblable à celle-ci, pour la deuxième équation du système (2). Quant à la troisième équation, elle est une conséquence des deux premières; elle est d'ailleurs satisfaite, comme nous l'avons vu, quel que soit (C).

La condition nécessaire et suffisante pour que $\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ soit une solution de (2) est donc qu'on ait

$$\gamma[u^{\alpha+1}(u-1)^{\beta+1}(u-x)^{\gamma-1}(u-y)^{\delta}]_{(C)}=\delta[u^{\alpha+1}(u-1)^{\beta+1}(u-x)^{\gamma}(u-y)^{\delta-1}]_{(C)}=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\gamma[G(u)]_{(C)}=\delta[G(u)]_{(C)}=0,$$

ou encore, γ et δ n'étant pas nuls,

$$[G(u)]_{(C)}=0.$$

Le parcours de (C) *doit ainsi ramener la fonction* $G(u)$ *à sa valeur initiale.* Tels doivent être les chemins d'intégration de l'intégrale (1).

2. Intégrales élémentaires. — On peut construire divers chemins d'intégration remplissant cette condition. Les plus simples sont les doubles circuits, employés par Pochhammer ([6]), encadrant chacun deux points singuliers comme l'indique la figure :

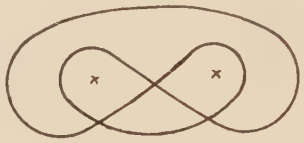

Fig. 7.

Pour les utiliser avec précision, soient A, B deux points fixes du plan u; traçons dans ce plan cinq coupures joignant le point A aux cinq points 0, 1, x, y, ∞. Soient I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 les valeurs de l'intégrale $\int G(u)\,du$ étendue à une ligne fermée, partant de B et y revenant, franchissant une seule des cinq coupures dans le sens de $-$ à $+$ (*fig.* 8), la valeur initiale de $G(u)$ au point B étant supposée donnée.

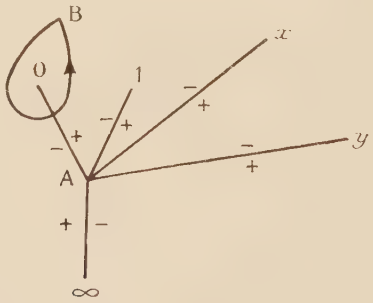

Fig. 8.

Les nombres 1, 2, 3, 4, 5 désignant ainsi les cinq circuits simples, nous désignerons par $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{5}$ les mêmes circuits parcourus en sens inverse. Les divers chemins d'intégration résultent de simples compositions de ces circuits; les doubles circuits de Pochhammer correspondent à celles de la forme $\bar{2}\,1\,2\,\bar{1}$, $3\,1\,3\,1$, etc. Désignons par $I(\bar{2}\,1\,2\,\bar{1})$, $I(\bar{3}\,1\,3\,\bar{1})$, ... les intégrales ainsi obtenues.

Prenons la première, par exemple, de ces intégrales. Les deux points singuliers encadrés étant 0 et 1, posons

$$[0, 1] = I(\bar{2}\,1\,2\,\bar{1}). \tag{33}$$

([6]) L. Pochhammer, *Ueber ein integral mit doppeltem Umlauf* (*Math. Ann.*, t. 35, 1890, p. 470 et suiv.).

Pour l'évaluer en fonction de I_1 et de I_2, remarquons que, d'une manière générale, λ *et* μ *désignant deux chemins fermés quelconques, et* $\lambda\mu$ *le chemin qui résulte de leur assemblage le second après le premier, on a*

$$I(\lambda\mu) = I(\lambda) + \varepsilon_\lambda I(\mu),$$

où ε_λ *est le facteur par lequel la fonction* $G(u)$ *se trouve multipliée par le parcours de* λ.

Il en résulte en particulier que l'intégrale $I(\bar{1})$, par exemple, n'est pas égale a $-I_1$, mais à $-\varepsilon_1^{-1} I_1$. On a, en effet,

$$I(\bar{1}\,1) = I(\bar{1}) + \varepsilon_1^{-1} I_1 = 0.$$

L'application à l'intégrale (33) donne ensuite

$$(34) \qquad [0, 1] = -\varepsilon_2^{-1} I_2 + \varepsilon_2^{-1} I_1 + \varepsilon_2^{-1}\varepsilon_1 I_2 - I_1 = -\varepsilon_2^{-1}(1-\varepsilon_1) I_2 - (1-\varepsilon_2^{-1}) I_1.$$

Les cinq multiplicateurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4, \varepsilon_5$ ont les valeurs suivantes, évidentes :

$$(35) \qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = e^{2\pi i\alpha}, \quad \varepsilon_2 = e^{2\pi i\beta}, \quad \varepsilon_3 = e^{2\pi i\gamma}, \quad \varepsilon_4 = e^{2\pi i\delta}, \\ \varepsilon_5 = \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_3^{-1}\varepsilon_4^{-1} = e^{-2\pi i(\alpha+\beta+\gamma+\delta)}. \end{cases}$$

Un cas classique est celui où les constances $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont telles qu'on puisse intégrer $G(u)$ jusqu'aux points singuliers. L'intégrale $[0, 1]$ se réduit alors, à un facteur constant près, à $\int_0^1 G(u)\,du$. En effet,

$$[0, 1] = \int_0^1 + \varepsilon_2^{-1}\int_1^0 + \varepsilon_2^{-1}\varepsilon_1\int_0^1 + \varepsilon_1\int_1^0,$$

d'où

$$[0, 1] = (1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2^{-1})\int_0^1 G(u)\,du.$$

Cette relation, valable dans ce cas, nous conduit, dans le cas général où nous nous sommes placés, à remplacer l'intégrale $[0, 1]$ par

$$(36) \qquad (0, 1) = \frac{[0, 1]}{(1-\varepsilon_1)(1-\varepsilon_2^{-1})}.$$

En posant de même

$$[1, 0] = I(\bar{1}\,2\,1\,\bar{2}), \qquad (1, 0) = \frac{[1, 0]}{(1-\varepsilon_2)(1-\varepsilon_1^{-1})},$$

nous avons, d'après (34),

$$(37) \qquad (0, 1) = \frac{I_2}{1-\varepsilon_2} - \frac{I_1}{1-\varepsilon_1}, \qquad (1, 0) = \frac{I_1}{1-\varepsilon_1} - \frac{I_2}{1-\varepsilon_2},$$

d'où, en particulier,

$$(1, 0) = -(0, 1),$$

ce qui constitue l'avantage de l'intégrale $(0, 1)$ sur $[0, 1]$, car $[1, 0]$ n'est pas égale à $-[0, 1]$.

A chaque paire de points singuliers, on peut ainsi faire correspondre une intégrale telle que (36), provenant d'un double circuit de Pochhammer. On aura en tout dix intégrales $(0, 1)$, $(0, x)$, ..., (y, ∞), solutions du système (2), intégrales que nous pouvons qualifier d'*élémentaires* : il n'est pas de chemin d'intégration plus simple qui conduise à une intégrale de $G(u)$ solution de (2), les intégrales I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, par exemple, n'étant pas solutions de (2).

Le système (2) étant d'ordre 3, il y aura, des dix intégrales élémentaires, trois au plus linéairement indépendantes. Des relations qui doivent lier les dix intégrales, les unes telles que

$$(0, 1) + (1, x) = (0, x),$$

découlent des formules (37) et de leurs analogues. Les autres relations proviennent d'une relation évidente qui existe entre les intégrales I_i elles-mêmes. Cette dernière dépend naturellement du système de coupures utilisé; dans le cas de la figure 8, elle s'écrit simplement, le chemin 1 2 3 4 5 étant évidemment réductible,

$$I(1\,2\,3\,4\,5) = 0,$$

donc

$$I_1 + \varepsilon_1 I_2 + \varepsilon_1\varepsilon_2 I_3 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 I_4 + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\varepsilon_4 I_5 = 0. \tag{38}$$

Déduisons-en, par exemple, la relation linéaire qui doit exister entre les quatre intégrales $(0, \infty)$, $(1, \infty)$, (x, ∞), (y, ∞). Nous avons, d'après les expressions de celles-ci, de la forme (37),

$$I_1 = \frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_3} I_3 = (1-\varepsilon_1)(0, \infty), \qquad I_2 = \frac{1-\varepsilon_2}{1-\varepsilon_4} I_4 = (1-\varepsilon_2)(1, \infty), \ldots.$$

En portant ces valeurs dans (38), nous obtenons, compte tenu de (35),

$$(1-\varepsilon_1)(0, \infty) + \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)(1, \infty) + \varepsilon_1\varepsilon_2(1-\varepsilon_3)(x, \infty) + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4)(y, \infty) = 0. \tag{39}$$

Pour avoir entre les dix intégrales sept relations linéairement indépendantes, il suffira d'adjoindre à cette relation (39) les six suivantes, évidemment indépendantes :

$$\begin{aligned}
(0, 1) + (1, x) &= (0, x),\\
(0, x) + (x, y) &= (0, y),\\
(1, x) + (x, y) &= (1, y),\\
(0, y) + (y, \infty) &= (0, \infty),\\
(1, y) + (y, \infty) &= (1, \infty),\\
(x, y) + (y, \infty) &= (x, \infty).
\end{aligned}$$

3. Solutions propres des substitutions fondamentales. — Notre système de coupures n'est pas caractérisé par le seul ordre dans lequel se succèdent les

cinq coupures. Pour des valeurs *déterminées* de x et de y, deux figures telles que

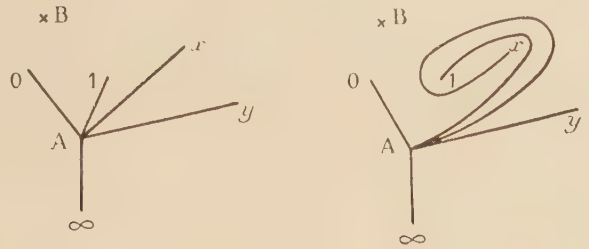

Fig 9

ne sont pas topologiquement réductibles l'une à l'autre.

Par contre, x et y étant supposées variables, on passe de la première figure à la deuxième en faisant faire à x un tour complet positif autour du point 1.

Les diverses déterminations d'une intégrale élémentaire correspondront donc aux divers systèmes de coupure ainsi obtenus. Pour passer d'une détermination à une autre, il est utile de décomposer en deux l'opération qui fait passer, par exemple, du premier système de coupures de la figure précédente au second. Désignons par ω_x l'opération élémentaire qui consiste à remplacer la coupure Ax par APx, et par $\overline{\omega}_x$ celle qui remplace Ax par AQx : APx est un arc qui forme avec Ax une courbe fermée enveloppant la coupure qui *suit* Ax (et laissant à son extérieur les autres coupures et le point B); AQx, par contre, forme avec Ax une courbe fermée enveloppant la coupure qui *précède* Ax :

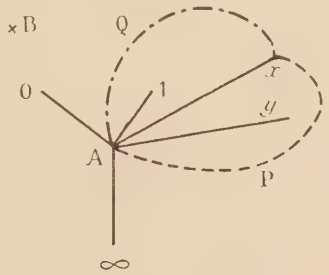

Fig. 10.

Les deux opérations ω_x et $\overline{\omega}_x$ sont inverses l'une de l'autre : après l'opération $\overline{\omega}_x$, par exemple, la coupure A 1 qui précédait Ax devient celle qui suit Ax; l'opération ω_x ramène alors à la position primitive; on voit ainsi qu'on a $\overline{\omega}_x\omega_x = 1$. On a de même $\omega_x\overline{\omega}_x = 1$.

On définit de même quatre autres opérations analogues ω_0, ω_1, ω_y, ω_∞. Ces cinq opérations élémentaires nous suffiront pour étudier les divers systèmes de coupures : on passe d'un système à un autre par un produit de ces opérations, chacune d'elles pouvant être élevée à une puissance entière positive ou

négative. On passe, par exemple, du premier système de la figure 9 au second par l'opération $\omega_1\omega_x$, et inversement, du second au premier, par $\overline{\omega}_x\overline{\omega}_1$.

Il est à remarquer que, par chacune de ces opérations, une seule des cinq intégrales I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 est changée et que c'est celle qui correspond, non à la coupure changée, mais à la suivante, celle qu'enveloppe la courbe fermée dont nous parlions. Prenons, par exemple, l'opération ω_0, qui consiste à remplacer AO par APO :

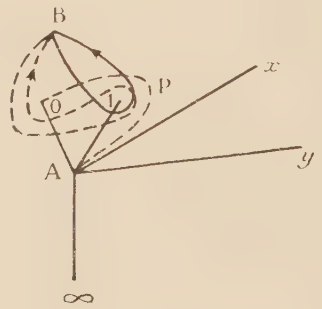

Fig. 11.

Les intégrales I_3, I_4, I_5 ne changent évidemment pas; I_1 non plus : le circuit simple 1 du système de coupures primitif reste utilisable dans le nouveau système. Le circuit simple 2, par contre, doit être remplacé par un autre, tracé en ligne pointillée dans la figure 11, et qui est un chemin $1\,2\,\overline{1}$; la nouvelle I_2 a donc pour valeur

$$I'_2 = I(1\,2\,\overline{1}) = I_1 + \varepsilon_1 I_2 - \varepsilon_2 I_1 = \varepsilon_1 I_2 + (1 - \varepsilon_2) I_1,$$

d'où

$$\frac{I'_2}{1-\varepsilon_2} = \frac{I_2}{1-\varepsilon_2} - (1-\varepsilon_1)(0, 1). \tag{40}$$

Il en résulte qu'en particulier l'intégrale $(0, 1)$ devient

$$(0, 1)' = \frac{I'_2}{1-\varepsilon_2} - \frac{I'_1}{1-\varepsilon_1} = \frac{I_2}{1-\varepsilon_2} - (1-\varepsilon_2)(0, 1) - \frac{I_1}{1-\varepsilon_1} = (0, 1) - (1-\varepsilon_1)(0, 1),$$

donc

$$(0, 1)' = \varepsilon_1 (0, 1).$$

En appliquant ensuite l'opération ω_1, on aura

$$(0, 1)'' = \varepsilon_2 (0, 1)' = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (0, 1).$$

Ainsi par l'opération $\omega_0\omega_1$, *l'intégrale* $(0, 1)$ *se reproduit multipliée par le facteur* $\varepsilon_1\varepsilon_2$.

Il est clair qu'on peut en dire autant des opérations $\omega_1\omega_x$, $\omega_x\omega_y$, $\omega_y\omega_z$, $\omega_z\omega_0$ et des intégrales $(1, x)$, (x, y), (y, ∞), $(0, \infty)$. Pour une intégrale telle

que $(0, x)$, les deux coupures correspondantes AO et Ax, à la différence du cas précédent, ne se suivent pas; un tour positif fait par x autour du point O s'obtient par l'opération $\bar{\omega}_x \omega_0 \omega_x \omega_x$. Comme l'opération $\bar{\omega}_x$, ainsi que l'opération ω_x après $\bar{\omega}_x \omega_0 \omega_x$, ne modifie que I_2, l'intégrale $(0, x)$ se reproduit toujours, multipliée par $\varepsilon_1 \varepsilon_3$.

Les dix intégrales élémentaires possèdent ainsi la propriété suivante :

chacune d'elles se reproduit, multipliée par un facteur déterminé, lorsqu'un des deux points singuliers correspondants, supposé mobile, fait un tour autour de l'autre.

Prenons d'abord les six intégrales

$$(41) \qquad (0, 1), \quad (0, x), \quad (0, y), \quad (1, x), \quad (1, y), \quad (x, y).$$

Pour chacune d'elles, le tour de l'un des deux points singuliers autour de l'autre devient, dans l'espace à deux dimensions complexes du chapitre I, un tour fait par le point (x, y) autour d'un des six plans singuliers (11), ce qui engendre, comme nous l'avons vu, une de ces substitutions du groupe de monodromie du système (2) que nous avons qualifiées de fondamentales. Chacune des six intégrales (41) est donc une *solution propre* de la subtitution fondamentale correspondante, et nous connaissons, d'après ce qui précède, la *valeur propre* à laquelle elle appartient.

Ce raisonnement demande, il est vrai, une précision en ce qui concerne l'intégrale $(0, 1)$. Le plus simple est de passer aux coordonnées homogènes : en désignant l'intégrale (1) par $F(x, y)$, on a

$$(42) \qquad F\left(\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}\right) = \int u^\alpha (u-1)^\beta \left(u - \frac{X}{T}\right)^\gamma \left(u - \frac{Y}{T}\right)^\delta du$$
$$= T^{-\alpha-\beta-\gamma-\delta-1} \int v^\alpha (v-T)^\beta (v-X)^\gamma (v-Y)^\delta dv$$

en posant $v = Tu$. L'intégrale (1) se ramène ainsi à l'intégrale

$$(43) \qquad \int v^\alpha (v-T)^\beta (v-X)^\gamma (v-Y)^\delta dv,$$

où figure, à la place du point 1, le point singulier mobile T. Le tour que celui-ci fait autour de 0 correspond alors, évidemment, à un tour, dans l'espace à deux dimensions complexes, autour du plan $T = 0$.

4. Autres solutions propres. — Reprenons, pour fixer les idées, l'intégrale $(1, x)$ et la substitution fondamentale correspondante S_{1x} qui résulte de l'opération $\omega_1 \omega_x$. Cette opération ne modifiant, comme nous l'avons vu, que I_2 et I_3, les intégrales $(0, y)$, (y, ∞), $(0, \infty)$ demeurent intactes et sont pour S_{1x} des solutions propres appartenant à la valeur propre 1. Comme on a

$$(0, y) + (y, \infty) = (0, \infty).$$

deux aux plus de ces solutions sont linéairement indépendantes; montrons qu'elles le sont effectivement :

La formule (40) et ses analogues montrent, en effet, que toute combinaison linéaire d'intégrales élémentaires devient une autre par chacune des substitutions fondamentales, et par conséquent par le groupe de monodromie lui-même. Si donc on laisse de côté le cas exceptionnel où le système (2), d'ordre 3, serait réductible à des systèmes d'ordre inférieur, trois des dix intégrales élémentaires doivent être linéairement indépendantes. Dès lors, si $(0, y)$ et (y, ∞), par exemple, n'étaient pas linéairement indépendants, la relation qui les lierait constituerait, avec les sept relations du paragraphe 2, huit relations linéairement indépendantes, ce qui est impossible.

La valeur propre 1 de la substitution S_{1x} est donc *double :* les solutions propres qui lui appartiennent dépendent linéairement de deux constantes arbitraires.

Cette dernière propriété appartient à l'ensemble des substitutions fondamentales : *chacune d'elles admet deux valeurs propres, l'une simple et l'autre double.* Nous trouverons d'ailleurs dans la suite d'autres substitutions douées de cette propriété.

5. Retour au demi-domaine fondamental (Δ). — Partant des intégrales élémentaires, nous sommes arrivés aux substitutions fondamentales dont elles donnent les solutions propres. Inversement, on peut, comme nous allons le faire, partir du demi-domaine fondamental (Δ) du chapitre I et des substitutions fondamentales qui s'y rapportent et essayer de retrouver les intégrales élémentaires comme solutions propres de ces substitutions.

Il s'agit, en somme, de confronter deux procédés utilisés indépendamment l'un de l'autre jusqu'ici. Pour désigner avec précision les substitutions fondamentales, nous avons eu recours, successivement, d'une part au demi-domaine (Δ), et d'autre part à un système de coupures tracé dans le plan u, tel celui de la figure 8. Dans les deux cas, chacune des substitutions fondamentales résulte d'un tour autour d'un plan singulier dans l'espace à deux dimensions complexes; mais deux chemins qui contournent un même plan singulier ne se réduisent pas nécessairement l'un à l'autre; un examen plus détaillé est donc nécessaire.

Le demi-domaine (Δ) ayant été choisi comme nous l'avons fait, les six substitutions fondamentales $a_1^+ a_2^-$, $a_2^+ a_3^-$, ..., $a_5^+ a_6^-$, $a_6^+ a_1^-$ déterminent, à des facteurs constants près, neuf solutions que voici :

D'abord leurs six solutions propres respectives à valeur propre simple :

$$z_{0,x}, \quad z_{1,x}, \quad z_{2,x}, \quad z_{1,y}, \quad z_{0,y}, \quad z_{0,1}.$$

Ensuite, *il existe une solution propre, à valeur propre double, commune aux substitutions* $a_6^+ a_1^-$, $a_1^+ a_2^-$, $a_2^+ a_3^-$, *qui sont les trois substitutions fondamentales autour*

du point triplement singulier $X = T = 0$, solution que nous désignerons par $z_{y\infty}$. Cette propriété sera établie dans un instant.

Il en est de même des points triples $X = Y = T$, $Y = T = 0$; nous désignerons par $z_{0\infty}$ la solution propre à valeur propre double commune aux substitutions $a_2^+ a_3^-$, $a_3^+ a_4^-$, $a_4^+ a_5^-$, et par $z_{x\infty}$ celle commune aux substitutions $a_4^+ a_5^-$, $a_5^+ a_6^-$, $a_6^+ a_1^-$.

Par contre, pour le point triple $X = Y = 0$, *il n'existe pas de solution propre, à valeur propre double, commune aux substitutions* $a_1^+ a_2^-$, $a_3^+ a_4^-$, $a_5^+ a_6^-$. La dissymétrie ainsi introduite entre les quatre points triples caractérise notre choix du demi-domaine (Δ).

Pour identifier ces solutions à des intégrales élémentaires, reprenons le système de coupures de la figure 8 en y marquant cette fois l'axe réel :

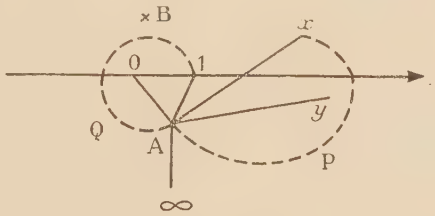

Fig. 12.

Pour obtenir les substitutions $a_1^+ a_2^-$, $a_2^+ a_3^-$, ..., $a_6^+ a_1^-$, utilisons les résultats du chapitre I (§ 11) : en posant

$$y = ax + b, \tag{23}$$

où les nombres réels a et b vérifient les inégalités

$$a < 0, \qquad b > 0, \qquad a + b - 1 > 0, \tag{24}$$

on obtient les substitutions en question en faisant tourner x autour des points

$$0, \quad 1, \quad \frac{b}{1-a}, \quad \frac{1-b}{a}, \quad \frac{-b}{a}, \quad \infty.$$

Le plan analytique réel (23) étant un plan (7, 8), la région 7, qui appartient à (Δ), correspond aux valeurs de x de partie imaginaire positive, ce qui donne à y, d'après (24), une partie imaginaire négative. Pour partir d'un point intérieur à (Δ), nous avons donc eu raison, dans la figure 12, de placer x au demi-plan supérieur et y à l'inférieur.

Cela étant, cherchons successivement les neuf solutions en vue :

1° z_{0x} et z_{1x}. — Quand x s'approche de 0 sans sortir du demi-plan supérieur, y s'approche d'un point de l'axe réel distinct de 0; le tour fait par x autour de 0 donne ainsi simplement l'intégrale $(0, x)$ comme solution propre à valeur

propre simple de la substitution correspondante, ce qui identifie z_{0x} à $(0, x)$, à un facteur constant près. Il en est de même de z_{1x} et de $(1, x)$. On peut donc poser

$$z_{0x} = (0, x), \qquad z_{1x} = (1, x).$$

2° z_{xy}. — Quand x s'approche du point $\frac{b}{1-a}$ de l'axe réel, y s'approche du même point; l'abscisse de ce point étant supérieure à 1 d'après (24), z_{xy} s'identifie à (x, y) :

$$z_{xy} = (x, y).$$

3° z_{01}. — Pour avoir la substitution $a_6^+ a_1^-$, on peut passer aux coordonnées homogènes et, au lieu de faire tourner x autour de l'infini, regarder le point 1 comme mobile et le faire tourner autour de 0. Plus exactement, remplaçons les lettres 1, x, y de la figure 12 par T, X, Y. X étant supposé fixe, Y est fonction de T seul :

$$Y = aX + bT.$$

Quand T s'approche de 0 le long de l'axe réel, X et Y restent distants de l'origine; le tour fait par T autour de 0 conduit ainsi à l'intégrale $(0, 1)$; on peut donc poser

$$z_{01} = (0, 1).$$

4° $z_{y\infty}$. — Le système de coupure de la figure 12 met en évidence que l'intégrale (y, ∞) ne change pas de valeur lorsqu'on fait tourner, soit x autour de 0 ou de 1, soit T autour de 0, opérations qui donnent, comme nous venons de le voir, les substitutions $a_1^+ a_2^-$, $a_2^+ a_3^-$, $a_6^+ a_1^-$. Ces substitutions admettent donc, comme nous l'avons annoncé, une solution propre commune et qui n'est autre que (y, ∞), à un facteur constant près; on peut donc poser

$$z_{y\infty} = (y, \infty).$$

Pour chacune des trois substitutions, cette solution propre appartient à la valeur propre 1, qui est bien double d'après le paragraphe précédent

5° z_{1y} et $z_{0\infty}$. — Pour obtenir de même les substitutions $a_4^+ a_5^-$ et $a_5^+ a_6^-$, d'autres systèmes de coupures sont nécessaires. Remplaçons d'abord la coupure Ax par APx (*fig.* 12), ce qui change I_4 en I'_4 ;

$$\frac{I'_4}{1-\varepsilon_4} = \frac{I_4}{1-\varepsilon_4} - (1-\varepsilon_3)(x, y).$$

Le point y peut alors s'approcher de 1 sans sortir du demi-plan inférieur; z_{1y} s'identifie ainsi à $(1, y)'$ et z_0 à $(0, \infty)'$. On aura

$$z_{1y} = (1, y)' = (1, y) - (1-\varepsilon_3)(x, y),$$
$$z_{0\infty} = (0, \infty)' = (0, \infty).$$

6° z_{0y} et z_{xx}. — Remplaçons *ensuite* la coupure A 1 par AQ 1 (*fig.* 12); on aura

$$\frac{I''_1}{1-\varepsilon_1} = \frac{I'_1}{1-\varepsilon_1} \quad (1 - \varepsilon_2^{-1})(0, 1)',$$

$$z_{0y} = (0, y)'' = (0, y)' + (1 - \varepsilon_2^{-1})(0, 1)' = (0, y) - (1 - \varepsilon_3)(x, y) + (1 - \varepsilon_2^{-1})(0, 1),$$

$$z_{xx} = (x, \infty)'' = (x, \infty)' = (x, \infty).$$

Conclusion : *Des neuf solutions envisagées, les deux seules qui ne soient pas identiques aux intégrales élémentaires correspondantes sont* z_{1y} *et* z_{0y}; *elles ont pour valeurs*

$$(44) \qquad \begin{cases} z_{1y} = (1, y) - (1 - \varepsilon_3)(x, y), \\ z_{0y} = (0, y) - (1 - \varepsilon_3)(x, y) + (1 - \varepsilon_2^{-1})(0, 1). \end{cases}$$

6. Relations de permutabilité. — Les six intégrales z_{0x}, z_{1x}, z_{xy}, z_{1y}, z_{0y}, z_{01}, solutions propres à valeur propre simple des six substitutions correspondantes

$$(45) \qquad \begin{cases} S_{0x} = a_1^+ a_2^-, & S_{1x} = a_2^+ a_3^-, & S_{xy} = a_3^+ a_4, \\ S_{1y} = a_4^+ a_5^-, & S_{0y} = a_5^+ a_6^-, & S_{01} = a_6^+ a_1^-. \end{cases}$$

sont des solutions propres à valeur propre double des mêmes substitutions prises dans un ordre différent. Un système de coupures approprié met en évidence cette propriété. Prenons, par exemple, les deux substitutions S_{0x} et S_{1y} auxquelles correspondent les solutions z_{0x} et z_{1y}. Un système de coupures tel que le suivant :

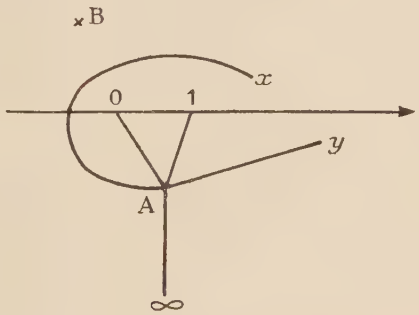

Fig. 13.

définit les mêmes solutions z_{0x} et z_{1y} qu'au paragraphe précédent, à des facteurs constants près; on voit ainsi que z_{0x} ne change pas lorsque y tourne autour de 1, ni z_{1y} lorsque x tourne autour de 0. Chacune des deux substitutions S_{0x}, S_{1y} admet ainsi comme solution propre à valeur propre double la solution propre à valeur propre simple de l'autre, *ce qui assure leur permutabilité*. On a, en effet, en z_{0x} et z_{1y} deux solutions propres, linéairement indépendantes, communes à S_{0x} et à S_{1y}. Une troisième solution propre commune s'obtient ensuite de la manière suivante : toute combinaison linéaire de z_{1y} et de z_{yx} est propre

pour S_{0x}, et toute combinaison linéaire de z_{0x} et de $z_{x\infty}$, pour S_{1y}; comme il existe une relation linéaire entre les quatre solutions z_{1y}, $z_{y\infty}$, z_{0x}, $z_{x\infty}$, on peut l'écrire

$$az_{1y} + bz_{y\infty} = cz_{0x} + dz_{x\infty},$$

mettant ainsi en évidence une solution propre, à valeur propre double, commune aux deux substitutions. Celles-ci ont ainsi en commun trois solutions propres linéairement indépendantes, ce qui suffit, comme on sait, pour qu'elles soient permutables.

On retrouve ainsi les relations de permutabilité du chapitre I, celles du type (30) :

$$(46)\qquad \begin{cases} S_{0x}S_{1y} = S_{1y}S_{0x} & \text{ou} \quad (a_1^+a_2^-)(a_4^+a_5^-) = (a_4^+a_5^-)(a_1^+a_2^-), \\ S_{1x}S_{0y} = S_{0y}S_{1x} & \text{ou} \quad (a_2^+a_3^-)(a_5^+a_6^-) = (a_5^+a_6^-)(a_2^+a_3^-), \\ S_{xy}S_{01} = S_{01}S_{xy} & \text{ou} \quad (a_3^+a_4^-)(a_6^+a_1^-) = (a_6^+a_1^-)(a_3^+a_4^-). \end{cases}$$

7. Autres relations de permutabilité. — On obtient de même, avec un calcul beaucoup plus long, les relations de permutabilité du type (29). Prenons, par exemple, les substitutions S_{01}, S_{0x}, S_{1x} qui ont respectivement pour solution propre à valeur propre simple z_{01}, z_{0x}, z_{1x}, et qui ont en commun, comme nous l'avons vu, la solution propre à valeur propre double $z_{y\infty}$. Comme deuxième solution propre à valeur propre double, on peut prendre $z_{x\infty}$ pour S_{01}, $z_{0\infty}$ pour S_{1x} et, pour S_{0x}, soit

$$z_{1y} = (1, y) - (1 - \varepsilon_3)(x, y),$$

soit une combinaison linéaire de z_{1y} et de $z_{y\infty}$ ne se réduisant pas à $z_{y\infty}$, telle que

$$(1, \infty)' = (1, \infty) - (1 - \varepsilon_3)(x, \infty);$$

c'est cette dernière que nous prendrons.

On a ainsi les solutions propres suivantes :

	Valeur propre simple.	Valeur propre double.
S_{01}	$(0, 1)$	(x, ∞), (y, ∞)
S_{0x}	$(0, x)$	$(1, \infty)'$, (y, ∞)
S_{1x}	$(1, x)$	$(0, \infty)$, (y, ∞)

Les relations linéaires qui font passer des solutions d'une ligne à celles d'une autre se déterminent sans difficulté, grâce à (39). Les voici :

1° Passage des solutions propres de S_{01} à celles de S_{0x} :

$$(1 - \varepsilon_1\varepsilon_3)(0, 1) = (1 - \varepsilon_3)(0, x) + (1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)(1, \infty)' - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3^2(1 - \varepsilon_4)(y, \infty),$$
$$(1 - \varepsilon_1\varepsilon_3)(x, \infty) = -(1 - \varepsilon_1)(0, x) - \varepsilon_3(1 - \varepsilon_2)(1, \infty)' - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1 - \varepsilon_4)(y, \infty);$$

2° Passage des solutions propres de S_{0x} à celles de S_{1x} :

$$\varepsilon_1(1 - \varepsilon_2\varepsilon_3)(0, x) = \varepsilon_1(1 - \varepsilon_2)(1, x) + (1 - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)(0, \infty) + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1 - \varepsilon_4)(y, \infty),$$
$$\varepsilon_1(1 - \varepsilon_2\varepsilon_3)(1, \infty)' = \varepsilon_1(1 - \varepsilon_3)(1, x) - \varepsilon_3(1 - \varepsilon_1)(0, \infty) - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3^2(1 - \varepsilon_4)(y, \infty);$$

3° Passage des solutions propres de S_{1x} à celles de S_{01} :

$$(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)(1, x) = -(1-\varepsilon_1)(0, 1) - (1-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)(x, \infty) - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4)(y, \infty),$$
$$(1-\varepsilon_1\varepsilon_2)(0, \infty) = \varepsilon_1(1-\varepsilon_2)(0, 1) - \varepsilon_1\varepsilon_2(1-\varepsilon_3)(x, \infty) - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4)(y, \infty).$$

Ces formules nous suffisent pour calculer les transformées des solutions $(0, 1)$ et (x, ∞) par la substitution $S_{0x}S_{1x}$, compte tenu des valeurs propres de S_{0x} qui sont ε_1 ε_3 et 1, et de celles de S_{1x} qui sont ε_2 ε_3 et 1. Le résultat remarquable en est que *par la substitution* $S_{0x}S_{1x}$, $(0, 1)$ *se transforme en* $\varepsilon_3(0, 1)$, *et* (x, ∞) *en*

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(x, \infty) - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4)(y, \infty).$$

Il en résulte que les substitutions S_{01} et $S_{0x}S_{1x}$ possèdent en commun, outre les solutions propres $(0, 1)$ et (y, ∞), une solution propre de la forme

$$(x, \infty) + \lambda(y, \infty),$$

où λ est une constante. Cette solution se transforme en effet, par $S_{0x}S_{1x}$, en

$$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(x, \infty) - \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4)(y, \infty) + \lambda(y, \infty);$$

elle se reproduira multipliée par ε_1 ε_2 ε_3 si l'on a

$$-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4) + \lambda = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\lambda,$$

ce qui donne, dans l'hypothèse générale ε_1 ε_2 $\varepsilon_3 \neq 1$,

$$\lambda = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4) : (1-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3).$$

On a ainsi trois solutions propres, linéairement indépendantes, communes à S_{01} et à $S_{0x}S_{1x}$, avec les valeurs propres suivantes [7] :

	$(0, 1)$.	$(1-\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)(x, \infty) + \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3(1-\varepsilon_4)(y, \infty)$.	(y, ∞).
S_{01}	$\varepsilon_1\varepsilon_2$	1	1
$S_{0x}S_{1x}$	ε_3	$\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$	1

Les substitutions S_{01} et $S_{0x}S_{1x}$ sont donc permutables, ce qui donne

$$S_{01}S_{0x}S_{1x} = S_{0x}S_{1x}S_{01}.$$

8. Équations de Pochhammer. — On peut adjoindre à cette dernière relation d'autres semblables obtenues de la même manière; on aura ainsi

$$(47)\quad \begin{cases} S_{y\infty} = S_{01}S_{0x}S_{1x} = S_{0x}S_{1x}S_{01} = S_{1x}S_{01}S_{0x}, \\ S_{0\infty} = S_{1x}S_{xy}S_{1y} = S_{xy}S_{1y}S_{1x} = S_{1y}S_{1x}S_{xy}, \\ S_{x\infty} = S_{1y}S_{0y}S_{01} = S_{0y}S_{01}S_{1y} = S_{01}S_{1y}S_{0y}, \end{cases}$$

en désignant par $S_{y\infty}$, $S_{0\infty}$, $S_{x\infty}$ les substitutions-produits qui en résultent, substitutions qui ont chacune, comme les substitutions qui les composent, *une*

(7) Au facteur ε_3 près pour celles de S_{01}, d'après la formule (42).

valeur propre simple et une valeur propre double. En effet, les trois solutions propres du paragraphe précédent, communes aux substitutions S_{01} et $S_{0x}\,S_{1x}$, restent propres pour le produit $S_{y\infty}$ de celles-ci, les valeurs propres se multipliant simplement, ce qui donne à $S_{y\infty}$ la valeur propre double $\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3$ et la valeur propre simple 1.

La solution propre à valeur propre simple de $S_{y\infty}$ n'est autre que $z_{y\infty}$; celles de $S_{0\infty}$ et de $S_{x\infty}$ sont de même $z_{0\infty}$ et $z_{x\infty}$.

On rencontre les substitutions (47) quand on considère certaines équations de Fuchs qui sont des cas limites de celles du chapitre I (§ 10 et suiv.). Reprenant le plan analytique (23), faisons tendre, par exemple, a vers zéro, ce qui conduit au plan $y = b$, avec $b > 1$, d'après (24). La fonction

$$\int u^{\alpha}(u-1)^{\beta}(u-x)^{\gamma}(u-ax-b)^{\delta}\,du$$

tend vers

$$\int u^{\alpha}(u-1)^{\beta}(u-x)^{\gamma}(u-b)^{\delta}\,du; \tag{48}$$

des six points singuliers

$$0,\quad 1,\quad \frac{b}{1-a},\quad \frac{1-b}{a},\quad \frac{-b}{a},\quad \infty,$$

les trois derniers vont se confondre dans le seul point ∞; le produit des trois substitutions fondamentales correspondantes donnera la substitution fondamentale limite relative à ∞.

Les quatre substitutions fondamentales provenant des quatre points singuliers 0, 1, b, ∞ de (48) sont donc, par conséquent, S_{0x}, S_{1x}, S_{xy}, $S_{x\infty}$; chacune d'elles possède, d'après ce qui précède, deux valeurs propres, une simple et une double, propriété caractéristique d'une classe d'équations de Fuchs que Pochhammer ([8]) a étudiée : l'équation de Fuchs qui résulte ainsi du système (2) moyennant la relation $y = b$ est une équation de Pochhammer.

Il en sera ainsi lorsqu'on considère, au lieu du plan $y = b$, un plan analytique réel quelconque passant par un des points triplement singuliers (12).

9. Compléments et conclusion. — Il nous reste à mettre en évidence les rôles symétriques des cinq indices 0, 1, x, y, ∞. Comme nous venons de le voir, les solutions propres $z_{y\infty}$, $z_{0\infty}$, $z_{x\infty}$, qui proviennent de valeurs propres doubles des substitutions (45), correspondent aux valeurs propres simples de $S_{y\infty}$, $S_{0\infty}$, $S_{x\infty}$. Réciproquement, les six autres solutions, à valeur propre simple, peuvent être déterminées comme solutions propres à valeur propre double. Ainsi z_{01} qui est propre pour $S_{y\infty}$ d'après le paragraphe 7, et de même pour $S_{x\infty}$, est propre en

---

([8]) L. Pochhammer, *Ueber hypergeometrische Functionen n-ter ordnung* (*Journal de Crelle*, t. 71, 1869, p. 316 et suiv.).

même temps pour la substitution S_{xy} avec laquelle S_{01} est permutable (deux substitutions permutables étant données, toute solution propre à valeur propre simple de l'une est aussi propre pour l'autre); il existe donc une solution propre, à valeur propre double, commune à S_{xy}, $S_{x\infty}$, $S_{y\infty}$ et qui n'est autre que z_{01}. Les solutions propres z_{1x} et z_{1y} sont de même communes respectivement à S_{0y}, $S_{0\infty}$, $S_{y\infty}$ et à S_{0x}, $S_{0\infty}$, $S_{x\infty}$.

On vérifie d'ailleurs sans difficulté, compte tenu de (45), les relations suivantes, analogues à (47) :

$$(49)\qquad \begin{cases} S_{y\infty}S_{xy}S_{x\infty} = S_{xy}S_{x\infty}S_{y\infty} = S_{x\infty}S_{y\infty}S_{xy} = S_{01}, \\ S_{0\infty}S_{0y}S_{y\infty} = S_{0y}S_{y\infty}S_{0\infty} = S_{y\infty}S_{0\infty}S_{0y} = S_{1x}, \\ S_{x\infty}S_{0x}S_{0\infty} = S_{0x}S_{0\infty}S_{x\infty} = S_{0\infty}S_{x\infty}S_{0x} = S_{1y}. \end{cases}$$

Pour z_{0x}, z_{xy}, z_{0y}, elles sont communes respectivement à S_{1y}, $S_{y\infty}$, à S_{01}, $S_{0\infty}$ et à S_{1x}, $S_{x\infty}$.

Les trois substitutions S_{0x}, S_{xy}, S_{0y}, comme nous l'avons déjà remarqué, n'ont pas, en général, de solution propre en commun. Deux quelconques d'entre elles ayant toujours en commun une solution propre à valeur propre double, soient respectivement $z'_{1\infty}$, $z''_{1\infty}$, $z'''_{1\infty}$ celles communes à S_{xy}, S_{0y} à S_{0y}, S_{0x} et à S_{0x}, S_{xy}. On les calcule en fonction d'intégrales élémentaires en choisissant convenablement, comme nous avons eu déjà l'occasion de le faire, certains systèmes de coupures intermédiaires, détails dans lesquels nous n'entrerons pas. On trouve ainsi

$$(50)\qquad \begin{cases} z'_{1\infty} = (1, \infty), \\ z''_{1\infty} = (1, \infty) - (1 - \varepsilon_3)(x, \infty), \\ z'''_{1\infty} = (1, \infty) - (1 - \varepsilon_1^{-1})(0, \infty). \end{cases}$$

Prenons, par exemple, $z''_{1\infty}$, solution propre commune à S_{0x} et à S_{0y}. Sans être propre pour S_{xy}, elle l'est pour une certaine transformée de S_{xy}. Posons, en effet,

$$(51)\qquad \Sigma_{xy} = S_{1y}^{-1}S_{xy}S_{1y} = S_{1x}S_{xy}S_{1x}^{-1},$$

l'égalité des deux derniers membres résultant simplement de (47). On a, compte tenu de (45),

$$\begin{aligned} S_{0y}^{-1}\Sigma_{xy}S_{0y} &= (a_6 a_5)(a_5^- a_4^-)(a_3 a_4)(a_4^+ a_5)(a_5 a_6) \\ &= (a_6^+ a_5^-)(a_5^+ a_4^-)(a_3^+ a_2^-)(a_2^+ a_1^-)(a_1^+ a_6^-) \\ &= (a_6^+ a_5^-)(a_5^+ a_4^-)(a_1^+ a_6^-)(a_5^+ a_2^-)(a_2^+ a_1^-) \\ &= (a_1^+ a_6^-)(a_6^+ a_5^-)(a_5^+ a_4^-)(a_5^+ a_2^-)(a_2^+ a_1^-) \\ &= (a_1^+ a_2^-)(a_2^+ a_3^-)(a_3^+ a_4^-)(a_3^+ a_2^-)(a_2^+ a_1^-) \\ &= S_{0x}\Sigma_{xy}S_{0x}^{-1}, \end{aligned}$$

d'où

$$\Sigma_{xy}S_{0y}S_{0x} = S_{0y}S_{0x}\Sigma_{xy}.$$

La solution $z''_{1\infty}$, étant propre pour S_{0x} et pour S_{0y}, est aussi propre pour $S_{0y}S_{0x}$.

Cette dernière substitution n'a plus, dans le cas général auquel nous nous bornerons, de valeur propre double; toutes ses solutions propres le seront en même temps pour Σ_{xy} avec laquelle elle est permutable; il en sera ainsi, en particulier, de $z''_{1\infty}$.

En posant

$$(52)\qquad \begin{cases} \Sigma_{0x} = S_{1x}^{-1} S_{0x} S_{1x} = S_{01} S_{0x} S_{01}^{-1}, \\ \Sigma_{0y} = S_{01}^{-1} S_{0y} S_{01} = S_{1y} S_{0y} S_{1y}^{-1}, \end{cases}$$

on démontre de même d'autres relations de permutabilité; on arrive ainsi aux substitutions suivantes

$$(53)\qquad \begin{cases} S'_{1\infty} = \Sigma_{0x} S_{xy} S_{0y} = S_{xy} S_{0y} \Sigma_{0x} = S_{0y} \Sigma_{0x} S_{xy}, \\ S''_{1\infty} = S_{0x} \Sigma_{0y} S_{0y} = \Sigma_{xy} S_{0y} S_{0x} = S_{0y} S_{0x} \Sigma_{xy}, \\ S'''_{1\infty} = S_{0x} S_{xy} \Sigma_{0y} = S_{xy} \Sigma_{0y} S_{0x} = \Sigma_{0y} S_{0x} S_{xy}. \end{cases}$$

Ces substitutions, que nous adjoindrons aux substitutions (45) et (47), possèdent chacune, comme celles-ci, une valeur propre simple et une valeur propre double; leurs solutions propres à valeur propre simple ne sont autre que $z'_{1\infty}$, $z''_{1\infty}$, $z'''_{1\infty}$.

On vérifie enfin

$$(54)\qquad \begin{cases} S_{y\infty} S_{1y} S''_{1\infty} = S_{1y} S''_{1\infty} S_{y\infty} = S''_{1\infty} S_{y\infty} S_{1y} = S_{0x}, \\ S'''_{1\infty} S_{1y} S_{y\infty} = S_{1y} S_{y\infty} S'''_{1\infty} = S_{y\infty} S'''_{1\infty} S_{1y} = S_{0x}, \end{cases}$$

ainsi que les relations analogues pour S_{xy} et S_{0y}, ce qui donne, avec (47), (49) et (53), quinze groupes de trois relations décomposant en trois chacune des douze substitutions (45), (47) et (53).

Ces relations, qui proviennent de relations de permutabilité du type (29), contiennent toutes celles du type (30). La première ligne, par exemple, de (47) donne immédiatement

$$S_{y\infty} S_{01} = S_{01} S_{y\infty}, \qquad S_{y\infty} S_{0x} = S_{0x} S_{y\infty}, \qquad S_{y\infty} S_{1x} = S_{1x} S_{y\infty}.$$

On résume les résultats ainsi obtenus en disant que *deux substitutions sans indice commun sont permutables, les seules exceptions à cette règle étant*

$$S'_{1\infty} \quad \text{et} \quad S_{0x}; \qquad S''_{1\infty} \quad \text{et} \quad S_{xy}; \qquad S'''_{1\infty} \quad \text{et} \quad S_{0y}.$$

Pour conclure, faisons remarquer que les cinq indices 0, 1, x, y, ∞, dont nous venons de rendre les rôles aussi symétriques que possible, gardent une certaine dissymétrie inévitable caractéristique, comme nous l'avons vu, du demi-domaine (Δ). La combinaison 1∞ donne trois substitutions au lieu d'une, ce qui fait correspondre, aux *dix* combinaisons de deux indices, *douze* substitutions, et *douze* intégrales, solutions propres à valeur propre simple des substitutions correspondantes.

Les mêmes intégrales donnent les solutions propres à valeur propre double des substitutions d'indices différents. Il en résulte, en particulier, que *des*

douze solutions considérées, trois quelconques qui ne prennent ensemble que trois indices distincts sont liés linéairement, les seules exceptions à cette règle étant

$$z_{0x'},\quad z_{xy},\quad z_{0y};\qquad z'_{1x},\quad z_{1y},\ z_{yx};\qquad z''_{1x},\quad z_{01},\quad z_{0x};\qquad z'''_{1x},\quad z_{1x},\quad z_{yx}.$$

CHAPITRE III.

Points caractéristiques.

1. Solutions propres et vecteurs propres. — Soient données trois solutions fondamentales z_1, z_2, z_3. Chaque substitution S du groupe de monodromie remplace ces solutions par trois autres :

$$C_{i1}z_1 + C_{i2}z_2 + C_{i3}z_3 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

qui sont trois autres de leurs déterminations. Elle fait correspondre à un système de valeurs prises par z_1, z_2, z_3 en un point, un autre système de valeurs prises au même point par les mêmes solutions, système qui résulte du premier par la matrice $\|C_{ik}\|$. Lorsqu'on regarde les valeurs de z_1, z_2, z_3 comme coordonnées d'un vecteur dans un espace à trois dimensions complexes, on aura ainsi en S une transformation de vecteur en vecteur.

Les vecteurs propres de S, qu'il ne faut pas confondre avec ses solutions propres, se rattachent à celles-ci de la manière suivante :

Bornons-nous au cas, qui seul nous intéressera, où il existe trois solutions propres linéairement indépendantes, que les valeurs propres correspondantes soient distinctes ou non. Z_1, Z_2, Z_3 désignant ces solutions, combinaires linéaires des solutions fondamentales, on peut écrire

$$Z_i = \sum_k \alpha_{ik} z_k,$$

d'où, le déterminant $|\alpha_{ik}|$ n'étant pas nul,

$$z_i = \sum_k \beta_{ik} Z_k. \tag{55}$$

Les solutions Z_1, Z_2, Z_3 étant propres, on a

$$\sum_{j,k} \alpha_{ij} C_{jk} z_k = s_i \sum_k \alpha_{ik} z_k = s_i Z_i,$$

en désignant par s_i les valeurs correspondantes. Il en résulte

$$\sum_{i,j,k} \beta_{hi}\alpha_{ij} C_{jk} z_k = \sum_k C_{hk} z_k = \sum_{k,i} C_{hk}\beta_{ki} Z_i = \sum_i \beta_{hi} s_i Z_i,$$

ce qui donne, grâce à l'indépendance linéaire de Z_1, Z_2, Z_3,

$$\sum_k C_{hk}\beta_{ki} = \beta_{hi} s_i.$$

On voit que *les vecteurs* $(\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i})$ *sont propres et appartiennent aux mêmes valeurs propres que* Z_i.

Donnons-nous maintenant deux substitutions du groupe de monodromie S et S′, *permutables*, ayant chacune trois solutions propres linéairement indépendantes : Z_i; Z'_i. *Montrons que l'indépendance linéaire des solutions propres* Z_1 *et* Z'_1, *supposées à valeur propre simple, entraîne celle des vecteurs propres correspondants.*

En effet, les substitutions S et S′ étant permutables, toute solution propre à valeur propre simple de l'une est aussi propre pour l'autre; elles ont donc en commun les solutions propres Z_1 et Z'_1. Soit Z pour S, et Z′ pour S′, une troisième solution propre linéairement indépendante de Z_1, Z'_1. La solution Z, par exemple, est à valeur propre simple ou, au contraire, double. Dans la première hypothèse, elle est propre aussi bien pour S′ que pour S. Dans la deuxième hypothèse, elle ne peut appartenir qu'à la valeur propre de Z'_1, Z_1 étant à valeur propre simple.

On raisonne de même ponr Z′.

Il reste le cas où les solutions Z et Z′, à valeur propre double l'une et l'autre, appartiennent la première à la valeur propre de Z'_1 et la deuxième à celle de Z_1. La relation linéaire qui existe entre les quatre solutions Z, Z′, Z_1, Z'_1 peut alors s'écrire

$$aZ + bZ'_1 = cZ' + dZ_1,$$

où les coefficients a et c ne sont pas nuls et où l'on a au premier membre une solution propre de S et au second membre une solution propre de S′.

Il existe ainsi dans tous les cas, outre les solutions Z et Z′, une troisième solution propre commune à S et à S′, linéairement indépendante, solution que nous désignerons par Z″. Dès lors, les relations

$$z_i = \beta_{i1} Z_1 + \beta'_{i1} Z'_1 + \beta''_i Z''$$

donnent trois vecteurs propres, linéairement indépendants, communs à S et à S′ : (β_{i1}), (β'_{i1}), (β''_i). Les solutions Z_1 et Z'_1 étant à valeur propre simple la première pour S et la deuxième pour S′, les vecteurs correspondants ne sont autres que (β_{i1}) et (β'_{i1}), ce qui prouve leur indépendance linéaire.

2. Espace des fonctions. — Comme nous l'avons vu dans l'introduction, nous cherchons à étendre, aux solutions du système (2), certaines propriétés des fonctions de Schwarz, rapports de deux solutions fondamentales d'une équation différentielle de Gauss. Ce sont donc, non les solutions z_1, z_2, z_3, mais les rapports mutuels de ces solutions qui nous intéresseront. Nous avons regardé z_1,

z_2, z_3 comme composantes d'un vecteur ; *nous les regarderons désormais comme coordonnées homogènes d'un point dans un espace projectif à deux dimensions complexes :* c'est l'espace des fonctions, l'espace des variables étant celui du chapitre I.

A tout point de l'espace des variables, les solutions z_i font correspondre, dans l'espace des fonctions, autant de points qu'elles admettent de déterminations différentes, points qui se déduisent les uns des autres par les substitutions du groupe de monodromie, *transformations homographiques* de l'espace à deux dimensions complexes.

On appelle *points caractéristiques* d'une homographie les points laissés fixes par celle-ci. Les vecteurs propres des substitutions deviennent ainsi les points caractéristiques des homographies, points qui ne sont pas toujours isolés : lorsque deux points (β_{i1}) et (β_{i2}), caractéristiques d'une même substitution, appartiennent à la même valeur propre, tout point de la forme $(\beta_{i1} + \lambda\beta_{i2})$ est, en effet, caractéristique; à toute valeur propre double correspondra un *plan analytique caractéristique,* tous les points de ce dernier étant caractéristiques.

L'application aux douze substitutions du chapitre II donne à chacune d'elles un plan caractéristique, en plus d'un point caractéristique isolé par lequel il ne passe pas. Soient P_{0x}, P_{1x}, ... ; Π_{0x}, Π_{1x}, ... les douze points et les douze plans analytiques ainsi obtenus. Deux substitutions sans indice commun étant permutables, sauf les cas exceptionnels indiqués au chapitre II (§ 9), il en résulte que *le plan caractéristique de l'une passe par le point caractéristique de l'autre.* Prenons, en effet, par exemple, les subtitutions $S_{0\infty}$ et S_{1x}. Comme conséquence de leur permutabilité, tout point caractéristique à valeur propre simple de l'une est aussi caractéristique de l'autre ; elles ont donc en commun les points caractéristiques $P_{0\infty}$ et P_{1x}, points qui sont distincts d'après le paragraphe précédent, les solutions $z_{0\infty}$ et z_{1x} étant linéairement indépendantes. Le point $P_{0\infty}$, ne pouvant pas ainsi se placer en P_{1x}, ne peut être caractéristique de S_{1x} que contenu par Π_{1x}. Le point P_{1x} est de même contenu par $\Pi_{0\infty}$.

Un plan analytique étant déterminé par deux de ses points, on voit que ni les douze points ni les douze plans ne peuvent être donnés arbitrairement et que, de plus, on peut déduire ceux-ci de ceux-là et inversement. Six des plans, à savoir Π_{1x}, Π_{1y}, Π_{01}, $\Pi_{y\infty}$, $\Pi_{0\infty}$, $\Pi_{x\infty}$, passent chacun par trois des points : Π_{1x} par P_{0y}, $P_{0\infty}$, $P_{y\infty}$; Π_{1y} par P_{0x}, $P_{0\infty}$, $P_{x\infty}$; etc. Les trois plans Π_{0x}, Π_{xy}, Π_{0y} passent chacun, par contre, par quatre points : Π_{0x} par P_{1y}, $P''_{1\infty}$, $P'''_{1\infty}$, $P_{y\infty}$; etc. Les trois plans $\Pi'_{1\infty}$, $\Pi''_{1\infty}$, $\Pi'''_{1\infty}$ passent chacun enfin, par deux points : $\Pi'_{1\infty}$ par P_{xy}, P_{0y} ; etc.

Ces points et ces plans sont, en général, complexes ; voici pourtant, dans l'espace à deux dimensions réelles, une *image* de ce qui a lieu dans l'espace à deux dimensions complexes (*fig.* 14).

Nous n'avons marqué d'indices que les points dans cette figure ; les indices des droites qui représentent les plans analytiques se déterminent par la règle

suivante : chacune de ces droites ne doit avoir aucun indice commun avec les points qu'elle porte, que ces points soient au nombre de deux, de trois ou de quatre. La droite $P_{01}P_{0x}P_{1x}$, par exemple, ne peut prendre aucun des indices 0, 1, x : elle représente le plan Π_{yx}.

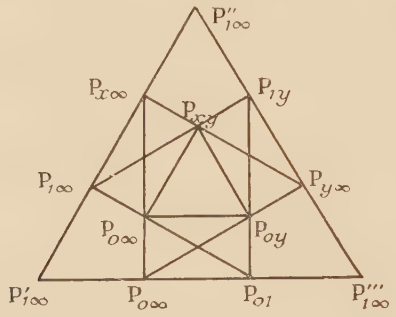

Fig. 14.

3. Rôle des constantes α, β, γ, δ. — La détermination du groupe de monodromie du système (2) se ramène à celle des points et plans caractéristiques des substitutions fondamentales considérées, dont nous connaissons, en effet, les valeurs propres. La détermination effective de ces points et plans fera l'objet du chapitre suivant. Terminons le présent chapitre par la remarque suivante :

Les rapports mutuels des solutions entrant seuls en jeu comme nous l'avons vu, ce sont moins les valeurs propres que leurs rapports mutuels qui nous serviront. Comme chacune des douze substitutions possède deux valeurs propres, une simple et une double, il y aura un seul rapport de valeurs propres pour chaque substitution, c'est le quotient, pour fixer les idées, de la valeur propre simple par la valeur propre double. L'analyse du chapitre II donne les valeurs des *quotients propres* ainsi obtenus : *les chiffres* 1, 2, 3, 4, 5 *des formules* (35) *correspondant aux indices* 0, 1, x, y, ∞, *la substitution du* $i^{\text{ième}}$ *et du* $k^{\text{ième}}$ *indices a pour quotient propre* $\varepsilon_i\varepsilon_k$. Le quotient propre de S_{0x} est ainsi égal à $\varepsilon_4\varepsilon_3$, et celui de S_{yx}, à $\varepsilon_4\varepsilon_5 = \varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1}\varepsilon_3^{-1}$.

Les substitutions $S'_{1\infty}$, $S''_{1\infty}$, $S'''_{1\infty}$ ayant le même quotient propre $\varepsilon_2\varepsilon_5$, il y a bien en tout dix quotients différents.

Ces quotients propres ne dépendent des constantes α, β, γ, δ qu'indirectement, par l'intermédiaire des formules (35) : ils ne sont pas changés lorsqu'on remplace ces constantes par d'autres qui en diffèrent par des nombres entiers. Le même remplacement conserve, plus généralement, comme nous le verrons au chapitre suivant, le groupe de monodromie.

D'autres problèmes, par contre, mettent directement en cause α, β, γ, δ. Cherchons, par exemple, au voisinage d'un point singulier, les rapports limites des solutions, problème que nous préciserons de la manière suivante :

Les solutions z_1, z_2, z_3 étant des fonctions uniformes dans le demi-domaine

(Δ), nous conviendrons d'aborder les points singuliers par l'intérieur de (Δ), le cas d'un point singulier complexe est le plus simple dans ces conditions : deux chemins continus, intérieurs à (Δ), partant d'un même point A (*fig.* 3) et aboutissant au même point singulier se ramènent alors l'un à l'autre, sans sortir de (Δ), par variation continue : l'image topologique du chapitre I nous le prouve clairement. Il n'en est pas de même d'un point singulier réel que cette image, comme nous l'avons remarqué, ne représente pas; il faudra alors préciser davantage le chemin d'accès, en recourant, par exemple, aux plans analytiques réels (chap. I, § 11 et suiv.). Examinons successivement les deux cas :

1° *Le point singulier est complexe.* — Soit $x = 0$, pour fixer les idées, le plan singulier auquel il appartient. Considérons alors la substitution S_{0x} et remplaçons dans les relations (55) Z_1 par z_{0x}, Z_2 et Z_3 par deux solutions propres à valeur propre double de S_{0x}, linéairement indépendantes, pour lesquelles nous pouvons prendre, par exemple, z_{1y} et $z_{y\infty}$:

$$z_i = \beta_{i1} z_{0x} + \beta_{i2} z_{1y} + \beta_{i3} z_{y\infty}. \tag{56}$$

Chacune de ces solutions est le produit d'une fonction, holomorphe et sans zéro dans le voisinage du point considéré, par un facteur de la forme x^λ; les nombres λ ainsi obtenus sont les *exposants* au sens de Fuchs. Pour déterminer λ, prenons d'abord ([9])

$$z_{0x} = (0, x) = \int_{(s)} u^\alpha (u-1)^\beta (u-x)^\gamma (u-y)^\delta \, du,$$

où (s) désigne un double circuit de Pochhammer autour de zéro et de x. De ce double circuit, qui dépend de x, on passe à un autre semblable, mais fixe, par le changement de variable $u = xu_1$:

$$z_{0x} = x^{\alpha+\gamma+1} \int_{(s_1)} u_1^\alpha (xu_1 - 1)^\beta (u_1 - 1)^\gamma (xu_1 - y)^\delta \, du_1.$$

L'intégrale de cette dernière formule étant évidemment holomorphe et non nulle pour $x = 0$, il en résulte $\lambda = \alpha + \gamma + 1$.

Pour les solutions z_{1y} et $z_{y\infty}$, on a de même, simplement, $\lambda = 0$.

C'est la différence de ces exposants qui nous intéressera, différence qui a pour valeur $\alpha + \gamma + 1$. Les constantes α, β, γ, δ étant supposées réelles, la solution z_{0x} l'emportera sur z_{1y} et $z_{y\infty}$, dans le voisinage de $x = 0$, si l'on a $\alpha + \gamma + 1 < 0$; les relations (56) donnent alors au point (z_i) la position limite (β_{i1}), ce qui n'est autre, d'après les paragraphes précédents, que P_{0x}, point

([9]) Nous négligeons le facteur constant de l'expression de $(0, x)$, facteur qui n'a ici aucune importance.

caractéristique de S_{0x}. Le même raisonnement placera cette position limite en un point du plan caractéristique Π_{0x} si l'on $\alpha+\gamma+1>0$.

Ainsi, *le point* (z_i) *a pour limite, soit le point* P_{0x}, *soit un point du plan* Π_{0x}, *suivant qu'on a* $\alpha+\gamma+1<0$ *ou* >0.

On a des résultats analogues lorsqu'on considére, au lieu de $x=0$, les cinq autres plans singuliers.

2° *Le point singulier est réel.* — Les plans analytiques réels passant par ce point n'étant pas tous de la même espèce, nous nous bornerons à l'espèce (7, 8) : on passera aux autres espèces sans difficulté, compte tenu de la remarque finale du chapitre I.

Un plan (7, 8) rencontre la chaîne réelle suivant une droite réelle qui porte sur elle, comme nous l'avons vu, six points singuliers, générateurs des six substitutions fondamentales (45). Il n'y a ici rien à changer au raisonnement du 1° : en abordant un de ces six points par la moitié supérieure du plan (7, 8), on obtiendra, comme position limite du point (z_i), soit le point caractéristique de la substitution correspondante, soit un point de son plan caractéristique, suivant la valeur de la différence d'exposants de ses solutions propres.

Reprenant maintenant les formules (23) et (24) définissant le plan (7, 8), faisons tendre a vers zéro comme au chapitre II (§ 8). Trois des six points se confondant alors à la limite, on atteindra ainsi le point triplement singulier $Y=T=0$. La position limite du point (z_i) dépend ici, comme on devait s'y attendre, de la substitution $S_{x\infty}$. Les solutions propres de celle-ci ayant pour différence d'exposants

$$-\alpha-\beta-\delta-1,$$

le point (z_i) aura pour limite, soit le point $P_{x\infty}$, soit un point du plan $\Pi_{x\infty}$, *suivant qu'on a* $\alpha+\beta+\delta+1>0$ *ou* <0.

Les six plans singuliers et les quatre points triplement singuliers donnent ainsi lieu à dix différences d'exposants :

$$(57)\qquad \begin{cases} \alpha+\beta+1, & \alpha+\gamma+1, & \ldots, & \gamma+\delta+1, \\ -\alpha-\beta-\gamma-1, & \ldots, & -\beta-\gamma-\delta-1, \end{cases}$$

que les dix quotients propres ne déterminent, évidemment, qu'à des nombres entiers près. Les signes de ces différences ne sont pas indépendants : on vérifie, par exemple, que les différences

$$\alpha+\beta+1,\qquad \alpha+\gamma+1,\qquad \beta+\gamma+1,\qquad \alpha-\beta-\gamma-1$$

ne peuvent être négatives toutes les quatre, ni les différences

$$\alpha+\beta+1,\qquad \gamma+\delta+1,\qquad -\alpha-\beta-\gamma-1,\qquad -\alpha-\beta-\delta-1.$$

CHAPITRE IV.

Cycles de chaines.

1. Chaines fondamentales. — Nous maintiendrons l'hypothèse, essentielle pour la suite, que les constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont réelles. Une conséquence immédiate est que les coefficients du système (2) sont des fonctions rationnelles réelles, prenant des valeurs réelles pour toutes valeurs réelles des variables x et y. Dès lors, étant donnés sur la chaîne réelle de l'espace des variables un domaine (d), à deux dimensions réelles, ne contenant aucun point singulier, et un point (x_0, y_0) de (d), toute solution de (2) qui prend en (x_0, y_0), ainsi que ses dérivées du premier ordre, des valeurs initiales réelles, restera réelle dans (d) comme il résulte du théorème classique d'existence.

Soient $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$, trois solutions ainsi obtenues linéairement indépendantes, indépendance assurée par la condition

$$\begin{vmatrix} \zeta_{10} & \zeta_{20} & \zeta_{30} \\ \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial \zeta_3}{\partial x}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial \zeta_2}{\partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial \zeta_3}{\partial y}\right)_0 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Les solutions (z_i) du chapitre précédent étant des combinaisons linéairesd e ζ_i, on peut écrire

$$z_i = a_{i1}\zeta_1 + a_{i2}\zeta_2 + a_{i3}\zeta_3.$$

Les solutions ζ_i restant réelles dans (d), il en résulte que le point (z_i) appartient à la chaîne planaire, transformée du sous-espace réel par l'homographie $\| a_{ik} \|$.

Ainsi, *lorsque le point (x, y) décrit le domaine (d), le point (z_i) décrit un domaine appartenant à une chaîne planaire.*

Cette chaîne planaire n'est bien déterminée que si les fonctions z_i le sont dans (d). Partant toujours du demi-domaine (Δ) où ces fonctions sont uniformes, il faudra préciser le chemin par lequel on aborde les points de (d), points frontières de (Δ). Les plans analytiques réels utilisés dans un problème semblable au chapitre III (§ 3) peuvent rendre ici les mêmes services.

Nous bornant toujours aux plans (7, 8), considérons les points réels qui leur appartiennent. Un plan (7, 8) ayant pour équation

$$y = ax + b,$$

où les nombres réels a et b vérifient les conditions

$$(24) \qquad a < 0, \qquad b > 0, \qquad a + b - 1 > 0,$$

la droite réelle suivant laquelle il rencontre la chaîne réelle a pour équation

$$u_2 = au_1 + b,$$

u_1, u_2 désignant les parties réelles de x, y. Les conditions (24), interprétées géométriquement, permettent de caractériser cette droite : de coefficient angulaire négatif, elle rencontre, de plus, la droite $u_1 = 1$ en un point d'ordonnée supérieure à 1. Il est clair qu'elle traverse six, et six seules, des douze régions dans lesquelles les droites singulières

$$u_1 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad u_1 = u_2, \qquad u_2 = 1, \qquad u_2 = 0$$

partagent la chaîne réelle : ce sont celles pour lesquelles les deux coordonnées ne sont pas inférieures à 1 en même temps :

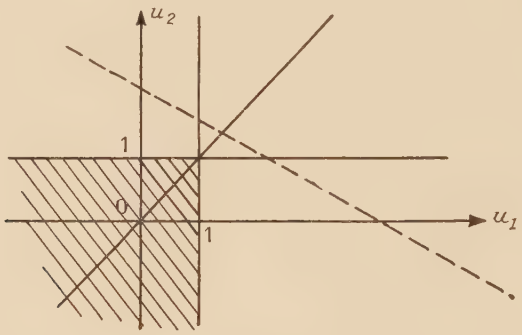

Fig. 15.

Chacune de ces régions est un domaine (d) dans lequel les fontions z_i se déterminent sans équivoque grâce aux plans (7, 8); il lui correspond donc, dans l'espace des fonctions, une chaîne planaire bien déterminée. Nous qualifierons de *fondamentales* les six chaînes planaires ainsi obtenues.

A d'autres espèces de plans analytiques réels correspondent d'autres chaînes fondamentales.

2. Symétries. — Une chaîne planaire (C) étant donnée par les équations paramétriques

(58) $$z_i = a_{i1} r_1 + a_{i2} r_2 + a_{i3} r_3,$$

où r_1, r_2, r_3 sont des paramètres *réels*, on appelle *symétrie par rapport à* (C) la transformation ponctuelle qui fait correspondre à un point M, de coordonnées homogènes

(59) $$z_i = a_{i1} \gamma_1 + a_{i2} \gamma_2 + a_{i3} \gamma_3,$$

le point M′ de coordonnées homogènes

60) $$z'_i = a_{i1} \bar{\gamma}_1 + a_{i2} \bar{\gamma}_2 + a_{i3} \bar{\gamma}_3,$$

les quantités complexes γ_i et γ_i étant conjuguées.

La transformation homographique $\|a_{ik}\|^{-1}$ qui ramène la chaîne (C) à la chaîne réelle ramène la symétrie considérée à une symétrie ordinaire par rapport à un sous-espace à deux dimensions réelles.

Comme il résulte des formules (59) et (60), les coordonnées z'_i sont des fonctions linéaires, non des coordonnées z_i, mais de leurs quantités conjuguées, ce qui fait qu'une symétrie n'est pas une homographie et que, par contre, le produit de deux symétries successives en est une. Montrons que, réciproquement, *toute homographie résulte, et d'une infinité de manières, d'un nombre pair de symétries.*

Une homographie pouvant avoir un, deux, trois ou une infinité de points caractéristiques, bornons-nous au cas où il existe trois points caractéristiques linéairement indépendants. Un changement de coordonnées préalable ayant ramené ces points aux points (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), l'homographie prendra la forme

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 = \lambda_1 z_1 : \lambda_2 z_2 : \lambda_3 z_3.$$

Examinons d'abord deux cas particuliers :

1° *Cas des λ_i unimodulaires* :

$$\lambda_1 = e^{2i\alpha_1}, \qquad \lambda_2 = e^{2i\alpha_2}, \qquad \lambda_3 = e^{2i\alpha_3},$$

α_1, α_2, α_3 désignant trois nombres réels.

Considérons dans ce cas les chaînes planaires de la forme

$$z_k = e^{i\omega_k} r_k,$$

les ω_k étant réels. Les symétries correspondantes substituent au point $z_k = e^{i\omega_k}\gamma_k$ le point

$$z'_k = e^{i\omega_k}\bar{\gamma}_k = e^{2i\omega_k}\bar{z}_k,$$

ce qui donne pour deux symétries successives

$$z''_k = e^{2i\omega'_k} z'_k = e^{2i(\omega'_k - \omega_k)} z_k.$$

Deux chaînes de la forme considérée pour lesquelles on a

$$\omega'_k - \omega_k = \alpha_k \qquad (k = 1, 2, 3),$$

donnent donc deux symétries dont l'homographie considérée est le produit. Il est clair qu'on peut choisir arbitrairement une de ces chaînes.

2° *Cas des λ_i réels et positifs.* — Ces λ_i ne sont toujours donnés qu'à un facteur commun près; on peut donc poser $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1$. Dès lors, il existe trois nombres positifs a^2, b^2, c^2 tels qu'on ait

$$\lambda_1 = \frac{a^2}{c^2}, \qquad \lambda_2 = \frac{b^2}{a^2}, \qquad \lambda_3 = \frac{c^2}{b^2},$$

ce qui décompose l'homographie donnée dans les trois suivantes, plus simples :

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 = a^2 z_1 : \frac{1}{a^2} z_2 : z_3,$$

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 = z_1 : b^2 z^2 : \frac{1}{b^2} z_3.$$

$$Z_1 : Z_2 : Z_3 = \frac{1}{c^2} z_1 : z_2 : c^2 z_3.$$

Chacune de ces dernières se décompose à son tour en deux symétries comme nous allons le démontrer. En effet, prenons par exemple la première de ces homographies. Soit τ un nombre réel; considérons la chaîne

$$z_1 = \tau(r_1 + ir_2), \qquad z_2 = \frac{1}{\tau}(r_1 - ir_2), \qquad z_3 = r_3$$

et la symétrie correspondante. Le point

$$z_1 = \tau(\gamma_1 + i\gamma_2), \qquad z_2 = \frac{1}{\tau}(\gamma_1 - i\gamma_2), \qquad z_3 = \gamma_3$$

aura pour symétrique le point

$$z'_1 = \tau(\bar{\gamma}_1 + i\bar{\gamma}_2) = \tau^2 \bar{z}_2, \qquad z'_2 = \frac{1}{\tau}(\bar{\gamma}_1 - i\bar{\gamma}_2) = \frac{1}{\tau^2}\bar{z}_1, \qquad z'_3 = \bar{\gamma}_3 = \bar{z}_3.$$

Une deuxième symétrie provenant d'une chaîne semblable donnera ensuite le point

$$z''_1 = \tau'^2 z'_2 = \frac{\tau'^2}{\tau^2} z_1, \qquad z''_2 = \frac{1}{\tau'^2} z'_1 = \frac{\tau^2}{\tau'^2} z^2, \qquad z''_3 = z'_3 = z_3,$$

ce qui coïncidera avec le point (Z_1, Z_2, Z_3) si l'on prend

$$\tau'^2 = a^2 \tau^2.$$

3° Le cas général résulte toujours, évidemment, des deux précédents; notre proposition se trouve ainsi justifiée.

3. Intersection de deux chaînes planaires. — Étant données deux chaînes planaires (C), (C′) et l'homographie (S) qui résulte des deux symétries correspondantes, tout point commun à (C) et à (C′), que ces symétries laissent évidemment fixe, est, par cela même, point caractéristique de (S). Voyons si, ou dans quelle mesure, on obtiendra ainsi tous les points caractéristiques.

Soient

$$z_i = \sum a_{ik} r_k, \qquad z'_i = \sum a'_{ik} r'_k$$

les équations paramétriques respectives des deux chaînes. La recherche de leurs points d'intersection se ramène à celle de valeurs réelles r_k, r'_k telles

qu'on ait, avec un facteur complexe λ,

$$\sum a_{ik} r_k = \lambda \sum a'_{ik} r'_k. \tag{61}$$

Les déterminants $|a_{ik}|$, $|a'_{ik}|$ ne sont pas nuls. On peut dès lors résoudre les équations (61) par rapport aux r_k par exemple :

$$r_i = \lambda \sum a^{-1}_{ih} a'_{hk} r'_k,$$

ce qui donne, par séparation des parties réelles et imaginaires,

$$r_i = \sum \left[\mathrm{R}(\lambda)\mathrm{R}\left(\sum a^{-1}_{ih} a'_{hk}\right) - \mathrm{I}(\lambda)\mathrm{I}\left(\sum a^{-1}_{ih} a'_{hk}\right)\right] r'_k, \tag{62}$$

$$0 = \sum \left[\mathrm{R}(\lambda)\mathrm{I}\left(\sum a^{-1}_{ih} a'_{hk}\right) + \mathrm{I}(\lambda)\mathrm{R}\left(\sum a^{-1}_{ih} a'_{hk}\right)\right] r'_k. \tag{63}$$

En donnant à i les valeurs 1, 2, 3, nous avons en (63) trois équations linéaires et homogènes entre les paramètres r'_k, lesquels ne doivent pas être nuls en même temps; il en résulte

$$\left| \mathrm{R}(\lambda)\mathrm{I}\left(\sum a^{-1}_{ih} a'_{hk}\right) + \mathrm{I}(\lambda)\mathrm{R}\left(\sum a^{-1}_{ih} a'_{hk}\right)\right| = 0, \tag{64}$$

où le premier membre désigne le déterminant des équations (63).

Cette relation (64), homogène et du troisième degré en $\mathrm{R}(\lambda)$ et $\mathrm{I}(\lambda)$ a de plus tous ses coefficients réels : elle admettra, pour le rapport $\mathrm{R}(\lambda) : \mathrm{I}(\lambda)$, trois racines, distinctes ou non, réelles ou complexes conjuguées. A chaque racine réelle correspondra, grâce aux équations (62) et (63), un point d'intersection au moins.

Les racines complexes ne conviennent pas, le rapport $\mathrm{R}(\lambda) : \mathrm{I}(\lambda)$, où $\mathrm{R}(\lambda)$ et $\mathrm{I}(\lambda)$ sont les parties réelle et imaginaire de λ, étant nécessairement réel.

On peut simplifier les équations (63) en remarquant que les chaînes ne changent pas lorsqu'on multiplie tous les a_{ik} ou tous les a'_{ik} par un nombre complexe quelconque, nombre qu'on peut toujours choisir tel que le déterminant $\left|\mathrm{R}\left(\sum a^{-1}_{ih} a'_{hk}\right)\right|$ diffère de zéro. En effet, toutes les fois que ce déterminant serait nul, il existerait une racine de (64) de la forme $\mathrm{R}(\lambda) = 0$, donc une valeur de λ imaginaire pure, éventualité qu'on peut écarter, il est clair, par un choix convenable du nombre complexe en question.

Dans ces conditions, posons

$$b_{ik} = \mathrm{R}\left(\sum a^{-1}_{ih} a'_{hk}\right), \qquad c_{ik} = \mathrm{I}\left(\sum a^{-1}_{ih} a'_{hk}\right),$$

ce qui permet d'écrire (63)

$$\mathrm{R}(\lambda) \sum c_{ik} r'_k + \mathrm{I}(\lambda) \sum b_{ik} r'_k = 0;$$

nous en déduirons, le déterminant $|b_{ik}|$ n'étant pas nul,

$$\sum b_{ih}^{-1} c_{hk} r'_k = \frac{I(\lambda)}{R(\lambda)} r'_i.$$

Ainsi, *les solutions de* (63) *ne sont autres que les vecteurs propres de la matrice*

$$\|b_{ik}\|^{-1} \cdot \|c_{ik}\| :$$

les r'_k *de chacune de ces solutions sont les composantes du vecteur propre appartenant à la valeur propre correspondante* $\frac{I(\lambda)}{R(\lambda)}$.

On peut dès lors appliquer à λ et aux r'_k les discussions classiques relatives aux valeurs et aux vecteurs propres. Il en résulte, en particulier, qu'à des racines réelles distinctes de (64) correspondent un nombre égal de points d'intersection linéairement indépendants.

4. Solutions formelles. — Que les points d'intersection de (C) et de (C′) ne constituent pas toujours l'ensemble des points caractéristiques de (S), c'est ce qu'on peut déduire du raisonnement suivant :

Dans le cas où l'équation (64) possède des racines complexes, nécessairement conjuguées, considérons les solutions *formelles* des équations (62) et (63), c'est-à-dire les systèmes de valeurs r_k, r'_k, complexes et conjugués, que ces équations déterminent lorsqu'on y remplace le rapport $R(\lambda) : I(\lambda)$ par les racines en question. En portant ces valeurs dans (61), nous obtiendrons deux points qui n'appartiennent, évidemment, ni à (C), ni à (C′), mais qui sont symétriques l'un de l'autre par rapport à chacune de ces deux chaînes. Dès lors, une première symétrie, par exemple par rapport à (C), remplace le premier point par le second qu'une symétrie par rapport à (C′) ramène ensuite au premier; on voit ainsi qu'*à deux racines complexes conjuguées de* (64) *correspondent deux points caractéristiques de* (S), *solutions formelles de* (63), points que les deux chaînes ne portent pas.

Il est clair d'ailleurs, réciproquement, que tout point caractérisque de (S), à moins d'être laissé fixe par chacune des deux symétries, doit avoir le même symétrique par rapport à (C) et à (C′). Les équations (63) et les racines de (64), tant réelles que complexes conjuguées, donnent ainsi tous les points caractéristiques.

5. Angles des deux chaînes. — Pour déterminer de même les valeurs propres de (S) ou plus exactement leurs rapports mutuels, bornons-nous au cas, qui suffira pour la suite, où les chaînes (C) et (C′) ont en commun trois points au moins, linéairement indépendants, provenant de trois racines réelles de (64) distinctes ou non. En désignant les coordonnées homogènes du premier point par u_{h1}, celles des deux autres par u_{h2} et u_{h3}, cherchons les équations générales des chaînes planaires passant par ces points.

Une quelconque de ces chaînes étant donnée, il existe une homographie qui la fait correspondre au sous-espace réel (c'est la définition même des chaînes planaires), homographie qui n'est déterminée, évidemment, qu'à une transformation près, elle-même homographique, changeant le sous-espace réel en lui-même. On peut toujours choisir celle-ci de manière à faire correspondre les points (u_{h1}), (u_{h2}), (u_{h3}) aux points (1, 0, 0), (0, 1, 0), 0, 0, 1). Dans ces conditions, soient

$$z_h = \sum u_{hk} r_k$$

les relations homographiques entre les coordonnées z_h d'un point de la chaîne et les coordonnées r_k du point réel correspondant; on aura, grâce aux trois paires de points considérées.

$$\frac{a_{1k}}{u_{1k}} = \frac{a_{2k}}{u_{2k}} = \frac{a_{3k}}{u_{3k}} = \rho_k e^{i\omega_k},$$

ρ_k et ω_k étant réels.

Les facteurs ρ_k peuvent être négligés, les r_k n'étant déterminés eux-mêmes qu'à des facteurs réels près; il reste ainsi

$$a_{hk} = u_{hk} e^{i\omega_k},$$

ce qui donne à la chaîne les équations paramétriques

$$z_h = \sum u_{hk} e^{i\omega_k} r_k.$$

On voit que *la famille des chaînes planaires qui passent par trois points donnés linéairement indépendants dépend de deux paramètres réels*, l'un des trois paramètres ω_k pouvant être arbitrairement choisi.

L'application aux deux chaînes (C) et (C′) permet de leur donner les équations paramétriques

$$(65) \qquad z_h = \sum u_{hk} r_k, \qquad z'_h = \sum u_{hk} e^{i\omega_k} r'_k;$$

les différences $\omega_2 - \omega_1$, $\omega_3 - \omega_1$, $\omega_3 - \omega_2$, qui mesurent en quelque sorte la distance des deux chaînes, sont ce que nous appellerons les *angles* que la chaîne (C′) forme avec (C), respectivement de (u_{h1}) à (u_{h2}) de (u_{h1}) à (u_{h3}), de (u_{h2}) à (u_{h3}), angles qui ne seront définis qu'à des multiples de π près. Deux seuls de ces angles sont indépendants, évidemment.

En calculant (S) à partir de (65), on remarquera que le point

$$z_h = \sum u_{hk} \gamma_k$$

a pour symétrique par rapport à (C) le point

$$\sum u_{hk} \bar{\gamma}_k = \sum u_{hk} e^{i\omega_k} \bar{\gamma}_k e^{-i\omega_k},$$

lequel a pour symétrique par rapport à (C′)

$$z_h = \sum u_{hk} e^{2i\omega_k} \gamma_k = \sum u_{hk} e^{2i\omega_k} u_{kl}^{-1} z_l,$$

ce qui mettra en évidence les quotients propres de (S), rapports mutuels des nombres $e^{2i\omega_k}$: *les demi-arguments de ces quotients propres égalent les angles des deux chaînes.*

Cette dernière propriété montre en même temps le caractère intrinsèque des angles : toute transformation homographique les laisse invariants.

6. Cycles de chaînes fondamentales. — Revenant aux chaînes fondamentales du paragraphe 1, considérons un plan analytique réel de l'espèce (7, 8), et l'équation de Fuchs correspondante (chap. I, § 10 et 11), à six points singuliers, dont les substitutions fondamentales engendrent, comme nous l'avons vu, le groupe de monodromie du système (2). La droite réelle de ce plan (7, 8) étant divisée en six segments par les points singuliers, chacune des substitutions considérées résulte des franchissements successifs de deux segments consécutifs, ou encore, de deux prolongements analytiques des solutions, le premier d'un point A de la région 7 au point conjugué A′ de la région 8, à travers un segment, et le deuxième de A′ à A à travers le segment suivant. Pour chacun de ces prolongements analytiques, les solutions ζ_i du paragraphe 1, étant réelles sur le segment, prennent aux deux points conjugués, d'après un théorème classique, des valeurs conjuguées, ce qui donne, lorsqu'on passe des ζ_i aux z_i, deux points de l'espace des fonctions, symétriques par rapport à la chaîne fondamentale correspondante.

Ainsi, *chacune des homographies fondamentales résulte de deux symétries par rapport à deux chaînes fondamentales consécutives.*

Les valeurs propres des substitutions fondamentales étant unimodulaires, il en est de même de leurs rapports mutuels, quotients propres des homographies correspondantes. Chacune de ces dernières possède de plus, comme nous l'avons vu au chapitre précédent, un point et un plan caractéristiques linéairement indépendants; il en résulte que pour deux chaînes fondamentales consécutives, toutes les racines de l'équation (64) sont réelles (l'existence de racines complexes entraînerait, comme on le vérifie sans difficulté, celle de quotients propres non-unimodulaires), et que deux de ces racines sont égales, donnant aux deux chaînes, moyennant (63), une infinité de points d'intersection dépendant d'un paramètre réel, infinité qui forme une *chaîne linéaire*, transformée homographique d'une droite réelle.

Toute chaîne linéaire appartient à un plan analytique *qu'elle détermine*, comme une droite réelle détermine le plan analytique réel auquel elle appartient. Il est clair que le plan analytique de la chaîne linéaire obtenue n'est autre que le plan caractéristique correspondant.

Les chaînes fondamentales possèdent ainsi cette propriété que *deux consécutives quelconques de ces chaînes ont en commun un point et une chaîne linéaire linéairement indépendants*. Par consécutives, on doit entendre ici, étant donné un certain nombre de chaînes planaires dans un ordre déterminé, deux chaînes qui se suivent l'une l'autre circulairement, la dernière chaîne étant regardée comme suivie de la première. Des chaînes planaires ainsi ordonnées forment ce que nous appellerons un *cycle;* les cycles qui possèdent la propriété précédente seront qualifiés, pour abréger, de *pochhammériens*.

Deux des trois valeurs propres étant égales pour chacune des homographies fondamentales, il en résulte que deux chaînes fondamentales consécutives forment un seul angle qui ne soit pas nul. On obtient ainsi, étant donné un cycle pochhammérien, autant d'angles qu'il existe de chaînes composantes : nous les appellerons simplement les *angles* du cycle.

L'existence de relations de permutabilité (chap. I et II) empêche qu'un cycle pochhammérien quelconque de six chaînes planaires puisse être regardé comme le cycle de chaînes fondamentales d'un système tel que (2). Les mêmes relations permettent, comme nous le verrons plus loin, de déterminer les six chaînes fondamentales par quatre d'entre elles convenablement choisies, celles, par exemple, que l'on obtient lorsqu'on considère, à la place du plan (7, 8), le plan $y = b$ du chapitre II (§ 8). La droite pointillée de la figure 15 devenant horizontale, les quatre chaînes correspondent aux quatre régions supérieures à la droite $u_2 = 1$; elles forment un cycle qui détermine des homographies semblables aux précédentes et qui reste, par conséquent, pochhammérien.

Le calcul du groupe de monodromie se ramène ainsi au problème géométrique suivant :

Déterminer un cycle pochhammérien de quatre chaînes planaires, connaissant ses quatre angles.

7. Cas général. — Pour résoudre ce problème, désignons par

$$(C_1), \quad (C_2), \quad (C_3), \quad (C_4)$$

les chaînes composantes du cycle à déterminer, par

$$X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad X_4$$

les points et par

$$(\gamma_1), \quad (\gamma_2), \quad (\gamma_3), \quad (\gamma_4)$$

les chaînes linéaires dans lesquels chacune d'elles rencontre la suivante : (C_1) et (C_2), par exemple, se rencontrent en X_1 et (γ_1), et (C_4) et (C_1) en X_4 et (γ_4). Soient enfin

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_3, \quad \theta_4$$

les angles du cycle correspondants.

Deux chaînes linéaires qui appartiennent à une même chaîne planaire se rencontrent en un point, à moins de se confondre entièrement. En effet, les droites réelles étant les seules chaînes linéaires du sous-espace réel, la transformation homographique qui ramène la chaîne planaire à ce sous-espace ramène les deux chaînes linéaires à deux droites réelles : elles se rencontrent ou se confondent comme celles-ci.

Appliquons cette remarque aux chaînes linéaires (γ_i) : les deux premières, par exemple, étant portées par la même chaîne planaire (C_2), se rencontreront en un point Y_1 si elles ne sont pas confondues; nous obtiendrons ainsi quatre points

$$Y_1, \quad Y_2, \quad Y_3, \quad Y_4$$

intersections de chacune des chaînes linéaires avec la suivante.

Ces derniers points peuvent n'être ni distincts ni même déterminés. Nous laisserons de côté cette difficulté en nous plaçant d'abord dans le cas général où *les quatre plans analytiques des chaînes linéaires sont trois à trois linéairement indépendants*, en ce sens que chacun de ces plans ayant pour équation une relation linéaire et homogène en z_1, z_2, z_3, le tableau des coefficients des quatre équations a ses quatre déterminants du troisième ordre différents de zéro. Soient dans ce cas

$$\Pi_1 = 0, \qquad \Pi_2 = 0, \qquad \Pi_3 = 0, \qquad \Pi_4 = 0$$

les équations en question; les points Y_i, n'étant autres, évidemment, que les points d'intersection des plans chacun avec le suivant, sont déterminés chacun par deux consécutives de ces équations :

$$\begin{aligned} Y_1 &: \quad \Pi_1 = 0, \qquad \Pi_2 = 0; \\ Y_2 &: \quad \Pi_2 = 0, \qquad \Pi_3 = 0; \\ Y_3 &: \quad \Pi_3 = 0, \qquad \Pi_4 = 0; \\ Y_4 &: \quad \Pi_4 = 0, \qquad \Pi_1 = 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que Y_1 et Y_2, par exemple, sont bien distincts, sans quoi le système de trois équations

$$\Pi_1 = 0, \qquad \Pi_2 = 0, \qquad \Pi_3 = 0$$

aurait une solution non nulle; que le plan analytique que ces points déterminent, et qui n'est autre que $\Pi_2 = 0$, ne passe pas par Y_3, sans quoi le système de trois équations

$$\Pi_2 = 0, \quad \Pi_3 = 0, \quad \Pi_4 = 0$$

aurait une solution non nulle; que les points Y_1, Y_2, Y_3 sont eux-mêmes, par conséquent, linéairement indépendants. On voit que *l'indépendance linéaire trois à trois des plans* Π_i *entraîne celle des points* Y_i.

Il est clair, d'après le même raisonnement, que la détermination des points Y_i et leur distinction chacun du suivant exigent inversement l'indépendance linéaire des plans Π_i trois à trois.

Il sera commode que nous désignions les points Y_i d'une manière légèrement différente : V_1, V_2, V_3, V_4 étant quatre points trois à trois linéairement indépendants, les quatre chaînes planaires à déterminer passent respectivement par les quatre systèmes de trois points suivants :

$$\begin{aligned}
&(C_1) : \quad V_2, \quad V_3, \quad V_4;\\
&(C_2) : \quad V_3, \quad V_4, \quad V_1;\\
&(C_3) : \quad V_4, \quad V_1, \quad V_2;\\
&(C_4) : \quad V_1, \quad V_2, \quad V_3.
\end{aligned}$$

V_1, V_2, V_3, V_4 ne sont autres que Y_2, Y_3, Y_4, Y_1.

Nous avons déjà vu, au paragraphe 5, quelle forme générale on peut donner aux équations paramétriques d'une chaîne planaire passant par trois points linéairement indépendants. En l'appliquant aux chaînes (C_i), nous pouvons écrire leurs équations

$$(C_j) : \quad z_h = \sum u_{hk} e^{i\omega_{jk}} r_k \qquad (k \neq j),$$

où u_{1i}, u_{2i}, u_{3i} désignent les coordonnées homogènes de V_i.

Prenons par exemple les deux premières de ces équations :

$$\begin{aligned}
z_h &= u_{h2} e^{i\omega_{12}} r_2 + u_{h3} e^{i\omega_{13}} r_3 + u_{h4} e^{i\omega_{14}} r_4,\\
z_h &= u_{h3} e^{i\omega_{23}} r_3 + u_{h4} e^{i\omega_{24}} r_4 + u_{h1} e^{i\omega_{21}} r_1.
\end{aligned}$$

Les deux chaînes ainsi représentées doivent avoir en commun une chaîne linéaire passant par les points V_3 et V_4. Il suffit pour cela, évidemment, qu'on ait

$$\omega_{23} - \omega_{13} = \omega_{24} - \omega_{14} \qquad (\bmod \pi).$$

Cette condition est aussi nécessaire. Désignons, en effet, par u_h les coordonnées homogènes du point d'intersection V des deux chaînes linéairement indépendant de leur chaîne linéaire commune; rapportées aux points V, V_3, V_4, les équations des chaînes prennent la forme

$$\begin{aligned}
z_h &= u_h e^{i\omega'_1} r' + u_{h3} e^{i\omega'_{13}} r'_3 + u_{h4} e^{i\omega'_{14}} r'_4,\\
z_h &= u_h e^{i\omega'_2} r' + u_{h3} e^{i\omega'_{23}} r'_3 + u_{h4} e^{i\omega'_{24}} r'_4,
\end{aligned}$$

et l'on doit avoir, pour que la chaîne linéaire puisse exister,

$$\omega'_{23} - \omega'_{13} = \omega'_{24} - \omega'_{14} \qquad (\bmod \pi).$$

Que ω'_{13} et ω'_{14}, par exemple, ne soient autres que ω_{13} et ω_{14}, on le voit simplement en identifiant. Nous avons

$$u_h e^{i\omega'_1} r' + u_{h3} e^{i\omega'_{13}} r'_3 + u_{h4} e^{i\omega'_{14}} r'_4 = u_{h2} e^{i\omega_{12}} r_2 + u_{h3} e^{i\omega_{13}} r_3 + u_{h4} e^{i\omega_{14}} r_4;$$

l'indépendance linéaire des points V, V_3, V_4 d'une part et de V_2, V_3, V_4 de l'autre a pour conséquence que la seule façon d'obtenir V_3 par exemple consiste à faire au premier membre $r' = r'_4 = 0$ et au second membre $r_2 = r_4 = 0$, ce qui donne

$$u_{h3} e^{i\omega'_{13}} r'_3 = u_{h3} e^{i\omega_{13}} r_3,$$

d'où

$$\omega'_{13} = \omega_{13} \qquad (\mathrm{mod}\, \pi).$$

Dès lors, ayant des conditions analogues pour deux consécutives quelconques des chaînes (C_j), posons

$$\omega_1 = \omega_{42} - \omega_{12} = \omega_{43} - \omega_{13},$$
$$\omega_2 = \omega_{13} - \omega_{23} = \omega_{14} - \omega_{24},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Comme on peut multiplier les équations d'une chaîne par un facteur sans changer cette chaîne, nous pouvons prendre

$$\omega_{12} = \omega_{23} = \omega_{34} = \omega_{41} = 0,$$

et nous aurons

$$\omega_{13} = \omega_2, \qquad \omega_{14} = \omega_2 + \omega_3,$$
$$\omega_{24} = \omega_3, \qquad \omega_{21} = \omega_3 + \omega_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

ce qui donne aux (C_j) les équations suivantes :

$$(66) \quad \begin{cases} (C_1): & z_h = u_{h2} r_2 + e^{i\omega_2} u_{h3} r_3 + e^{i(\omega_2+\omega_3)} u_{h4} r_4, \\ (C_2): & z_h = u_{h3} r_3 + e^{i\omega_3} u_{h4} r_4 + e^{i(\omega_3+\omega_4)} u_{h1} r_1, \\ (C_3): & z_h = u_{h4} r_4 + e^{i\omega_4} u_{h1} r_1 + e^{i(\omega_4+\omega_1)} u_{h2} r_2, \\ (C_4): & z_h = u_{h1} r_1 + e^{i\omega_1} u_{h2} r_2 + e^{i(\omega_1+\omega_2)} u_{h3} r_3, \end{cases}$$

Une transformation homographique ferait correspondre les points V_i à quatre points trois à trois linéairement indépendants et arbitrairement donnés (chap. I, § 4). Deux cycles transformés homographiques l'un de l'autre étant considérés comme équivalents, il résulte de (66) *qu'un cycle pochhammérien de quatre chaînes planaires dépend de quatre paramètres réels*, à savoir ω_1, ω_2, ω_3, ω_4. Nous prouverons plus loin l'invariance de ces paramètres.

Dans le tableau des coordonnées u_{hk} $(h = 1, 2, 3;\ k = 1, 2, 3, 4)$, soient α_1, α_2, α_3, α_4 les quatre déterminants du troisième ordre, dont aucun n'est nul, grâce à l'indépendance linéaire des points V_i trois à trois, et qui permettent d'écrire, quel que soit h,

$$\alpha_1 u_{h1} + \alpha_2 u_{h2} + \alpha_3 u_{h3} + \alpha_4 u_{h4} = 0.$$

Les nombres u_{hk} n'étant déterminés jusqu'ici qu'à quatre facteurs près, on peut choisir ceux-ci de manière à avoir

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$$

et, par conséquent, quel que soit h,

$$u_{h1} + u_{h2} + u_{h3} + u_{h4} = 0. \tag{67}$$

Cherchons, dans ces conditions, les angles du cycle (66).

Reprenons pour cela le point V, de coordonnées u_h, qui compose avec la chaîne linéaire l'intersection des chaînes (C_1) et (C_2). Nous devons avoir

$$u_h = u_{h2} r'_2 + e^{i\omega_2} u_{h3} r'_3 + e^{i(\omega_2+\omega_3)} u_{h4} r'_4 = \lambda [e^{i\omega_2} u_{h3} r''_3 + e^{i(\omega_2+\omega_3)} u_{h4} r''_4 + e^{i(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} u_{h1} r''_1], \tag{68}$$

où r'_2, r'_3, r'_4, r''_3, r''_4, r''_1, sont réels et λ complexe. Les nombres r'_2 et r''_1 étant nécessairement différents de zéro, sans quoi le point V appartiendrait à la chaîne linéaire, nous pouvons tirer de (68) u_{h2} et u_{h1}, ce qui permet d'écrire les équations de (C_1) et de (C_2) sous la forme

$$z_h = \frac{u_h}{r'_2} r_2 + e^{i\omega_2} u_{h3} \left(r_3 - \frac{r'_3}{r'_2} r_2 \right) + e^{i(\omega_2+\omega_3)} u_{h4} \left(r_4 - \frac{r'_4}{r'_2} r_2 \right).$$

$$z_h = \frac{u_h}{\lambda r''_1} r_1 + e^{i\omega_2} u_{h3} \left(r_3 - \frac{r''_3}{r''_1} r_1 \right) + e^{i(\omega_2+\omega_3)} u_{h4} \left(r_4 - \frac{r''_4}{r''_1} r_1 \right).$$

L'angle des deux chaînes (de la chaîne linéaire au point V) se met ainsi en évidence et est égal à $-\arg\lambda$. Or, en portant dans (68) la valeur de u_{h1} tirée de (67) et identifiant, on trouve les relations

$$\left\{ \begin{aligned} r'_2 &= -\lambda e^{i(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} r''_1, \\ r'_3 &= \lambda [r''_3 - e^{i(\omega_3+\omega_4)} r''_1], \\ r'_4 &= \lambda [r''_4 - e^{i\omega_4} r''_1], \end{aligned} \right. \tag{69}$$

dont la première donne r'_2 et r''_1 n'étant pas nuls,

$$\arg\lambda = -(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \pmod{\pi}. \tag{70}$$

L'angle considéré égale donc $\omega_2 + \omega_3 + \omega_4$.

En égalant à θ_i les angles du cycle (66), on a ainsi

$$\left\{ \begin{aligned} \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 &= \theta_1 \\ \omega_3 + \omega_4 + \omega_1 &= \theta_2 \\ \omega_4 + \omega_1 + \omega_2 &= \theta_3 \\ \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 &= \theta_4 \end{aligned} \right\} \pmod{\pi}, \tag{71}$$

d'où

$$3 \sum \omega = \sum \theta \pmod{\pi},$$

$$\sum \omega = \frac{\sum \theta}{3} + \frac{m\pi}{3} \pmod{\pi}, \tag{72}$$

m désignant un nombre entier. En donnant à m les valeurs 0, 1, 2, on obtiendra pour ω_i trois systèmes de valeurs différents :

$$\omega_i = \frac{\sum \theta}{3} - \theta_i + \frac{m\pi}{3} \pmod{\pi}. \tag{73}$$

On peut ainsi conclure : la solution du problème géméotrique que nous nous sommes posé n'est pas unique, mais triple : *chaque système de valeurs* θ_i *détermine, à des transformations homographiques près, trois cycles pochhammériens différents.*

8. Examen des cas exceptés. — L'indépendance linéaire des plans Π_i trois à trois, caractéristique du cas général considéré, ne peut tomber en défaut que lorsqu'il existe un point au moins que les quatre chaînes (C_i) possèdent en commun. En effet, supposons, pour fixer les idées, que les plans Π_1, Π_2, Π_3 ne sont pas linéairement indépendants; distinguons les trois cas suivants :

1° Π_1 et Π_2 ne sont pas confondus, ni Π_2 et Π_3. Il existe alors un point unique, commun aux trois plans, intersection commune des trois chaînes linéaires correspondantes dont (γ_1) et (γ_2) ne sont pas confondues, ni (γ_2) et (γ_3).

2° Π_1 et Π_2 sont confondus, mais non Π_2 et Π_3. Les chaînes (γ_1) et (γ_2) sont alors confondues; leur intersection avec (γ_3) donne le point unique commun à (γ_1), (γ_2), (γ_3).

Résultat analogue si Π_2 et Π_3 sont confondus, mais non Π_1 et Π_2.

3° Les trois plans sont confondus. Il en est alors de même des trois chaînes linéaires.

Il existe ainsi, dans tous les cas, un point au moins commun à (γ_1), (γ_2), (γ_3) et, par conséquent, aux chaînes (C_1), (C_2), (C_3), (C_4) dont chacune passe par une au moins des trois chaînes linéaires.

Un tel point, laissé fixe par chacune des symétries fondamentales, reste fixe par le groupe de monodromie qu'elles déterminent : il est caractéristique pour toutes les homographies du groupe. En le prenant pour le point (0, 0, 1), considérons une quelconque de ces homographies.

$$\begin{aligned} Z_1 &= C_{11} z_1 + C_{12} z_2 + C_{13} z_3, \\ Z_2 &= C_{21} z_1 + C_{22} z_2 + C_{23} z_3, \\ Z_3 &= C_{31} z_1 + C_{32} z_2 + C_{33} z_3, \end{aligned}$$

Le point (0, 0, 1) devant se reproduire par cette substitution, on a nécessairement

$$C_{13} = C_{23} = 0,$$

ce qui montre que les solutions z_1 et z_2 se transforment indépendamment de z_3 et vérifient, par conséquent, un système différentiel d'ordre 2. *Le système* (2), *d'ordre* 3, *a dû être réductible à des systèmes d'ordre inférieur.*

En nous bornant aux systèmes (2) irréductibles ([10]), nous ne devrons donc considérer, pour obtenir les chaînes fondamentales, que les cycles du paragraphe précédent.

([10]) Hypothèse déjà admise au chapitre II (§ 4).

9. Les points X_i. — Les angles θ_i du paragraphe 7, que nous identifierons plus loin aux nombres

$$(\alpha+\gamma)\pi,\quad (\beta+\gamma)\pi,\quad (\gamma+\delta)\pi,\quad -(\alpha+\beta+\delta)\pi,$$

ne doivent jamais être nuls (mod π) : le cycle de chaînes fondamentales n'est pochhammérien, au sens strict que nous avons donné à ce mot, que sous cette condition. Nous ne nous étendrons pas sur les cas ainsi écartés; on pourra les obtenir comme limites des cas étudiés.

Reprenons, dans ces conditions, les formules (69) et (70) qui nous donnent pour le point V, par séparation de parties réelles et imaginaires,

$$\frac{r''_3}{\sin\omega_2}=\frac{r''_4}{\sin(\omega_2+\omega_3)}=\frac{r''_1}{\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)},$$

$$\frac{r'_2}{r''_1}=\frac{r'_3}{r''_1\cos\omega_2-r''_3\cos(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}=\frac{r'_4}{r''_1\cos(\omega_2+\omega_3)-r''_4\cos(\omega_2+\omega_3+\omega_4)};$$

d'où

$$\frac{r'_2}{\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}=\frac{r'_3}{\sin(\omega_3+\omega_4)}=\frac{r'_4}{\sin\omega_4}.$$

Il en résulte, d'après (68),

$$u_h=u_{h2}\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)+e^{i\omega_2}u_{h3}\sin(\omega_3+\omega_4)+e^{i(\omega_2+\omega_3)}u_{h4}\sin\omega_4,$$

ou encore, vectoriellement,

$$V=\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)+V_2\,e^{i\omega_2}\sin(\omega_3+\omega_4)V_3+e^{i(\omega_2+\omega_3)}\sin\omega_4\,V_4.$$

L'angle $\theta_1=\omega_2+\omega_3+\omega_4$ n'étant pas nul (mod π), on a effectivement en V un point d'intersection de (C_1) et de (C_2) linéairement indépendant de (γ_1). Ce n'est autre que le point X_1.

On ne change pas le point en multipliant les trois coefficients de cette formule par un même facteur; on peut ainsi écrire

$$X_1=\sigma(-\omega_2-\omega_3-\omega_4)V_2+\sigma(-\omega_3-\omega_4)V_3+\sigma(-\omega_4)V_4, \tag{74}$$

avec

$$\sigma(a)=e^{ia}\sin a. \tag{75}$$

On vérifie sans peine l'identité

$$\sigma(a)-\sigma(b)=e^{2ib}\sigma(a-b) \tag{76}$$

grâce à laquelle il est facile, compte tenu de (67), de déduire de (74) d'autres expressions de X_1; on trouve ainsi

$$\begin{aligned} X_1 &= e^{-2i\omega_4}[\sigma(\omega_4)V_1+\sigma(-\omega_2-\omega_3)V_2+\sigma(-\omega_3)V_3] \\ &= e^{-2i(\omega_3+\omega_4)}[\sigma(\omega_3)V_4+\sigma(\omega_3+\omega_4)V_1+\sigma(-\omega_2)V_2] \\ &= e^{-2i(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}[\sigma(\omega_2)V_3+\sigma(\omega_2+\omega_3)V_4+\sigma(\omega_2+\omega_3+\omega_4)V_1]. \end{aligned} \tag{77}$$

Les analogues des formules (74) et (77) donnent de même les autres X_i. Celles qui rapportent trois des X_i à trois des V_i ont des déterminants que l'on calcule sans peine, grâce toujours à (76); on a ainsi, par exemple, en valeur absolue,

$$(78)\qquad \left|\frac{D(X_1, X_2, X_3)}{D(V_1, V_2, V_3)}\right| = \left|\frac{D(X_1, X_2, X_3)}{D(V_2, V_3, V_4)}\right| = \left|\frac{D(X_1, X_2, X_3)}{D(V_3, V_4, V_1)}\right|$$
$$= \left|\frac{D(X_1, X_2, X_3)}{D(V_4, V_1, V_2)}\right| = \left|\sigma(\omega_4)\left[\sigma\left(\sum\omega\right)\right]^2\right| = |\sin\omega_4|\sin^2\left(\sum\omega\right).$$

Les points V_i étant linéairement indépendants trois à trois, il en sera de même des points X_i *si ni* ω_i *ni la somme de ces paramètres ne sont multiples de* π.

Écrivons enfin, à côté de (74),

$$X_2 = e^{-2i\omega_1}[\sigma(\omega_1)V_2 + \sigma(-\omega_3-\omega_4)V_3 + \sigma(-\omega_4)V_4],$$

ce qui donne

$$X_1 - e^{2i\omega_1}X_2 = [\sigma(-\omega_2-\omega_3-\omega_4) - \sigma(\omega_1)]V_2 = e^{2i\omega_1}\sigma\left(-\sum\omega\right)V_2,$$

ou encore

$$(79)\qquad X_1 e^{-2i\omega_1} - X_2 = \sigma\left(-\sum\omega\right)V_2.$$

Comme $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 0$, on en déduit

$$(80)\qquad X_1(e^{-2i\omega_1}-1) + X_2(e^{-2i\omega_2}-1) + X_3(e^{-2i\omega_3}-1) + X_4(e^{-2i\omega_4}-1) = 0.$$

10. Interprétation géométrique des ω_i. — Par quatre points trois à trois linéairement indépendants, il passe une, et une seule, chaîne planaire (chap. I, § 5). Trois de ces points étant pris pour les points (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), la famille qu'ils déterminent se compose de chaînes planaires de la forme

$$z_1 = e^{i\alpha_1}r_1, \qquad z_2 = e^{i\alpha_2}r_2, \qquad z_3 = e^{i\alpha_3}r_3.$$

Les coordonnées a_1, a_2, a_3 du quatrième point étant nécessairement différentes de zéro, les relations

$$\frac{a_1}{e^{i\alpha_1}r_1} = \frac{a_2}{e^{i\alpha_2}r_2} = \frac{a_3}{e^{i\alpha_3}r_3}$$

donnent univoquement les différences $\alpha_2 - \alpha_1$, $\alpha_3 - \alpha_1$.

Considérons maintenant les équations

$$z_h = u_{h2}r_2 + u_{h3}r_3 + u_{h4}r_4,$$
$$z_h = u_{h3}r_3 + u_{h4}r_4 + u_{h1}r_1,$$
$$z_h = u_{h4}r_4 + u_{h1}r_1 + u_{h2}r_2,$$
$$z_h = u_{h1}r_1 + u_{h2}r_2 + u_{h3}r_3,$$

qui résultent de (66) par l'évanouissement des ω_i. La condition (67) a pour conséquence qu'elles représentent une même chaîne planaire, celle donc qui

passe par les quatre points V_i et que nous désignerons par (G). En les comparant aux équations (66), on voit que *les* ω_i *sont les divers angles que les chaînes* (C_i) *forment avec* (G) : la chaîne (C_1). par exemple, forme avec (G) les angles ω_2 et ω_3.

L'invariance des paramètres ω_i se trouve ainsi mise en évidence.

11. Détermination de l'entier m. — Pour appliquer le paragraphe 7 à la fonction hypergéométrique, considérons, comme au paragraphe 6, un plan analytique passant par un des points triplement singuliers, soit le plan $y = b (b > 1)$ pour fixer les idées, auquel correspondent quatre chaînes fondamentales formant, comme nous l'avons vu, un cycle pochhammérien. Les quatre homographies fondamentales qui doivent en résulter, chacune par deux symétries, ne sont autres que les substitutions S_{0x}, S_{1x}, S_{xy}, $S_{x\infty}$; leurs quotients propres, calculés au chapitre II, sont les nombres suivants :

$$\varepsilon_1 \varepsilon_3 = e^{2i(\alpha+\gamma)\pi}, \qquad \varepsilon_2 \varepsilon_3 = e^{2i(\beta+\gamma)\pi}, \qquad \varepsilon_3 \varepsilon_4 = e^{2i(\gamma+\delta)\pi},$$
$$\varepsilon_3 \varepsilon_5 = \varepsilon_1^{-1} \varepsilon_2^{-1} \varepsilon_4^{-1} = e^{-2i(\alpha+\beta+\delta)\pi}.$$

Les demi-arguments de ces nombres donnent les angles du cycle :

$$(81) \qquad \begin{cases} \theta_1 = (\alpha+\gamma)\pi, \qquad \theta_2 = (\beta+\gamma)\pi, \qquad \theta_3 = (\gamma+\delta)\pi, \\ \theta_4 = -(\alpha+\beta+\delta)\pi, \end{cases}$$

ce qui détermine, d'après le paragraphe 7, trois cycles différents. Il nous reste à reconnaître, parmi ces cycles, celui qui convient.

Cherchons pour cela l'intersection des chaînes (C_1) et (C_3). Nous devons avoir, pour tout point d'intersection,

$$u_{h2} r'_2 + e^{i\omega_2} u_{h3} r'_3 + e^{i(\omega_2+\omega_3)} u_{h4} r'_4 = \lambda \left[e^{i(\omega_2+\omega_3)} u_{h4} r''_4 + e^{i(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} u_{h1} r''_1 + e^{i\sum\omega} u_{h2} r''_2 \right],$$

où r'_2, r'_3, r'_4, r''_4, r''_1, r''_2 sont réels et λ complexe. En remplaçant u_{h1} par sa valeur tirée de (67) et identifiant, nous obtiendrons les relations

$$\begin{aligned} r'_2 &= \lambda \left[e^{i\sum\omega} r''_2 - e^{i(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} r''_1 \right], \\ r'_3 &= -\lambda\, e^{i(\omega_3+\omega_4)} r''_1, \\ r'_4 &= \lambda [r''_4 - e^{i\omega_4} r''_1], \end{aligned}$$

On peut les satisfaire en faisant d'abord $r''_1 = 0$. On a alors, soit

$$\arg\lambda = 0, \qquad r''_2 = 0,$$

ce qui donne le point V_4 ; soit

$$\arg\lambda = -\sum\omega, \qquad r''_4 = 0,$$

ce qui donne le point V_2.

Pour $r''_1 \neq 0$, la deuxième des trois relations exige

$$\arg\lambda = -(\omega_3 + \omega_4),$$

et les deux autres déterminent ensuite les rapports $r''_4 : r''_1 : r''_2$; on a ainsi un troisième point d'intersection V.

On en déduit, tout comme au paragraphe 7, les angles des deux chaînes qui sont égaux à $\sum \omega$, de V_4 à V_2, et à $\omega_3 + \omega_4$, de V_4 à V.

L'homographie qui résulte des deux symétries par rapport à (C_1) et à (C_3) est le produit de deux autres dont la première résulte de (C_1) et de (C_2), et la deuxième, de (C_2) et de (C_3). Elle n'est autre, par conséquent, que la substitution $S_{0x}S_{1x}$, dont nous connaissons, grâce au chapitre II (§ 7), les quotients propres :

$$\varepsilon_3 = e^{2i\gamma\pi}, \qquad \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 = e^{2i(\alpha+\beta+\gamma)\pi}.$$

Les demi-arguments de ces quotients propres devant égaler les angles des chaînes (C_1) et (C_3), il en résulte, en particulier,

$$(82) \qquad \sum \omega = \gamma\pi \qquad (\operatorname{mod}\pi).$$

En portant dans (72) les valeurs (81) des θ_i et la valeur (82) de $\sum \omega$, on constate ainsi que $m = 0$. Il vient donc, en définitive,

$$(83) \qquad \omega_1 = -\alpha\pi, \qquad \omega_2 = -\beta\pi, \qquad \omega_3 = -\delta\pi, \qquad \omega_4 = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi \qquad (\operatorname{mod}\pi).$$

Le cycle de chaînes fondamentales considéré achève ainsi de se construire géométriquement; les parties non entières des constantes α, β, γ, δ interviennent seules, comme on devait s'y attendre, dans le résultat.

Le problème du groupe de monodromie est dès lors résolu :

Trois branches fondamentales de l'intégrale

$$\int u^\alpha (u-1)^\beta (u-x)^\gamma (u-b)^\delta \, du \qquad (b > 1),$$

se transforment par des homographies qu'un cycle de quatre chaînes planaires détermine par symétries successives; les équations (66) *donnent les quatre chaînes à une transformation homographique près lorsque les* ω_i *ont les valeurs* (83).

Le groupe de ces homographies, groupe de monodromie de l'intégrale précédente, n'est pas celui de l'intégrale

$$\int u^\alpha (u-1)^\beta (u-x)^\gamma (u-y)^\delta \, du.$$

Il n'en est encore qu'un sous-groupe, mais un sous-groupe qui le *détermine*, grâce aux relations de permutabilité. La figure 14 du chapitre III prouve cette détermination de la manière suivante :

Les substitutions fondamentales des deux groupes étant respectivement

$$S_{0x},\quad S_{1x},\quad S_{xy},\quad S_{x\infty}=S_{1y}S_{0y}S_{01},$$

et

$$S_{0x},\quad S_{1x},\quad S_{xy},\quad S_{1y},\quad S_{0y},\quad S_{01},$$

on peut obtenir S_{1y}, S_{0y}, S_{01} à partir de S_{0x}, S_{1x}, S_{xy}, $S_{x\infty}$. Le point et le plan caractéristiques de S_{1y} résultent, en effet, de ceux de S_{0x} et de $S_{x\infty}$: P_{1y} est le point d'intersection de Π_{0x} et de $\Pi_{x\infty}$; Π_{1y} est le plan qui passe par P_{0x} et $P_{x\infty}$. On en déduit S_{1y}, dont on connaît en effet le quotient propre. On raisonne de même pour S_{0y} et S_{01}.

12. Hypersurface hermitienne. — Une hypersurface hermitienne (H) étant l'ensemble des points dont les coordonnées homogènes annulent une forme d'Hermite

$$H(Z)=H(z_1, z_2, z_3)=A_{hk}\bar{z}_h z_k \qquad (A_{kh}=\bar{A}_{hk}),$$

deux points $Z(z_1, z_2, z_3)$, $Z'(z'_1, z'_2, z'_3)$ sont *conjugués* par rapport à (H) si l'on a

$$H(Z, Z')=A_{hk}\bar{z}_h z'_k=0,$$

ce qui entraîne aussi

$$H(Z', Z)=0,$$

les deux quantités complexes $H(Z, Z')$ et $H(Z', Z)$ étant toujours conjuguées.

Une chaîne planaire est *orthogonale* à (H) si elle contient trois points linéairement indépendants deux à deux conjugués. Une telle chaîne étant donnée, la transformation homographique qui la ramène à la chaîne réelle (C_0) ramène (H) à une hypersurface hermitienne (H_0) par rapport à laquelle trois points réels sont conjugués. Une homographie réelle pouvant faire correspondre deux groupes quelconques de trois points réels linéairement indépendants, et les formes d'Hermite diagonales donnant les seules hypersurfaces hermitiennes qui conjuguent les points (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), il en résulte qu'on peut obtenir l'équation de (H_0) comme transformée homographique réelle d'une équation diagonale; tous ses coefficients sont donc réels :

Les formes d'Hermite à coefficients réels donnent les hypersurfaces hermitiennes orthogonales à la chaîne réelle.

On ne change pas ces formes lorsqu'on permute z_i et $\bar{z}_i$. Il en résulte que tout point de (H_0) a pour symétrique par rapport à (C_0) un autre point de (H_0) : *la symétrie par rapport à* (C_0) *conserve* (H_0), ce qui suffit pour en dire autant de (H) et des chaînes planaires orthogonales à (H).

L'homographie qui résulte de deux chaînes planaires (C) et (C′), orthogonales à (H), conserve encore (H). Nous bornant au cas où elle possède un point et un plan caractéristiques linéairement indépendants, montrons que *le premier a le second pour plan conjugué, lieu de ses points conjugués.*

En effet, désignons par S la substitution linéaire, matrice de l'homographie considérée. Les neuf coefficients de S n'étant déterminés qu'à un facteur près, on peut choisir celui-ci de telle manière que S ne conserve pas seulement (H), mais la forme d'Hermite elle-même qui s'y annule. On a ainsi, quel que soit Z,

$$H(SZ) = H(Z),$$

ce qui entraîne, quels que soient Z_1 et Z_2,

$$H(SZ_1, SZ_2) = H(Z_1, Z_2),$$

Comme on a, pour deux points caractéristiques, à valeurs propres λ_1 et λ_2,

$$SZ_1 = \lambda_1 Z_1, \qquad SZ_2 = \lambda_2 Z_2,$$

on en déduit

$$H(SZ_1\, SZ_2) = \bar{\lambda}_1 \lambda_2 H(Z_1\, Z_2) = H(Z_1, Z_2),$$

ou encore

$$(\bar{\lambda}_1 \lambda_2 - 1) H(Z_1\, Z_2) = 0.$$

Deux points caractéristiques pour lesquels le produit $\bar{\lambda}_1 \lambda_2$ diffère de l'unité se trouvent ainsi nécessairement conjugués. C'est bien le cas du point caractéristique isolé P et d'un point quelconque du plan caractéristique Π : le rapport $\lambda_1 : \lambda_2$ étant alors unimodulaire, la relation $\bar{\lambda}_1 \lambda_2 = 1$ entraînerait $\lambda_1 : \lambda_2 = 1$, ce qui n'est possible que pour $S = 1$.

Reprenons maintenant les chaînes planaires du cycle (66); demandons-nous s'il existe une hypersurface hermitienne qui leur soit orthogonale à toutes. Elle doit conjuguer, d'après ce qui précède, quatre paires de point et de plan, à savoir le point X_1 et le plan $V_3 V_4$, X_2 et $V_4 V_1$, X_3 et $V_1 V_2$, X_4 et $V_2 V_3$. Ces conditions nécessaires sont aussi *suffisantes*, par suite de la structure du cycle. En effet, la chaîne (C_1), par exemple, porte sur elle les points X_4, X_1, V_2, V_3, V_4; les chaînes linéaires (γ_4) et (γ_1) passent respectivement par V_2 et V_3, V_3 et V_4. L'hypersurface qui conjugue X_4 et $V_2 V_3$, et X_1 et $V_3 V_4$, conjugue le point V_3 et le plan $X_4 X_1$. Ce dernier plan, ayant deux points communs avec (C_1), rencontre (C_1) suivant une chaîne linéaire (γ'); le point où (γ_1), par exemple, rencontre (γ') forme avec X_1 et V_3 trois points deux à deux conjugués, ce qui assure l'orthogonalité de (H) et de (C_1).

Un point est conjugué à un plan s'il l'est à deux points de ce plan. Nous avons dès lors, pour le point X_1 et le plan $V_3 V_4$, les conditions

$$H(X_1, V_3) = 0, \qquad H(X_1, V_4) = 0.$$

La formule (79) du paragraphe 9 ayant pour analogues

$$\sigma\left(-\sum \omega\right) V_3 = X_2\, e^{-2i\omega_2} - X^3, \qquad \sigma\left(-\sum \omega\right) V_4 = X_3\, e^{-2i\omega_3} - X_4,$$

il en résulte

$$H(X_1, X_2) = e^{2i\omega_2} H(X_1, X_3), \qquad H(X_1, X_3) = e^{2i\omega_3} H(X_1, X_4).$$

Nous avons des conditions semblables pour les autres paires de point et de plan, ce qui donne huit conditions en tout :

$$(84)\quad \begin{cases} H(X_1, X_2) = e^{2i\omega_2} H(X_1, X_3) = e^{2i(\omega_2+\omega_3)} H(X_1, X_4), \\ H(X_2, X_3) = e^{2i\omega_3} H(X_2, X_4) = e^{2i(\omega_3+\omega_4)} H(X_2, X_1), \\ H(X_3, X_4) = e^{2i\omega_4} H(X_3, X_1) = e^{2i(\omega_4+\omega_1)} H(X_3, X_2), \\ H(X_4, X_1) = e^{2i\omega_1} H(X_4, X_2) = e^{2i(\omega_1+\omega_2)} H(X_4, X_3). \end{cases}$$

Prenons par exemple celles de la première ligne. Nous pouvons écrire, compte tenu de la formule (80),

$$H(X_1, X_2) = \frac{H(X_1, X_3)}{e^{-2i\omega_2}} = \frac{H(X_1, X_4)}{e^{-2i(\omega_2+\omega_3)}} = \frac{-H(X_1)(e^{-2i\omega_1}-1)}{e^{-2i(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}-1}$$

$$= \frac{-H(X_1)\sin\omega_1}{\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} e^{i(-\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}.$$

En posant

$$(85)\qquad R_1 = \frac{-H(X_1)\sin\omega_1}{\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}$$

nous avons ainsi les relations

$$(86)\quad \begin{cases} H(X_1, X_2) = R_1 e^{i(-\omega_1+\omega_2-\omega_3+\omega_4)}, \\ H(X_1, X_3) = R_1 e^{i(-\omega_1-\omega_2+\omega_3+\omega_4)}, \\ H(X_1, X_4) = R_1 e^{i(-\omega_1-\omega_2-\omega_3+\omega_4)}, \end{cases}$$

dont chacune, il est clair, est conséquence des deux autres.

Si l'on joint à (86) les relations analogues qui résultent de la deuxième et de la troisième lignes de (84), six des neuf relations ainsi obtenues expriment les six nombres complexes $H(X_h, X_k)$ $(h, k = 1, 2, 3;\ h \neq k)$ en fonction des nombres réels R_1, R_2, R_3; les deux nombres $H(X_h, X_k)$ et $H(X_k, X_h)$ devant toujours être conjugués, il faudra qu'on ait

$$(87)\qquad R_1 = R_2 = R_3.$$

Pour les trois autres relations, conséquences de celles-là, elles entraînent à leur tour, grâce à (87), la quatrième ligne de (84).

Les conditions (84) *reviennent ainsi à égaler, à un facteur réel près, les neuf* $H(X_h, X_k)$ $(h, k = 1, 2, 3)$ *aux nombres suivants :*

$$(88)\quad \begin{cases} \dfrac{-\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}{\sin\omega_1}, & e^{i(-\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)}, & e^{i(-\omega_1-\omega_2+\omega_3+\omega_4)}, \\ e^{i(\omega_1-\omega_2-\omega_3-\omega_4)}, & \dfrac{-\sin(\omega_3+\omega_4+\omega_1)}{\sin\omega_2}, & e^{i(\omega_1-\omega_2+\omega_3+\omega_4)}, \\ e^{i(\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)}, & e^{i(-\omega_1+\omega_2-\omega_3-\omega_4)}, & \dfrac{-\sin(\omega_4+\omega_1+\omega_2)}{\sin\omega_3}. \end{cases}$$

Les coefficients A_{hk} de la forme d'Hermite $H(Z)$ peuvent être écrits

$$A_{hk} = H(E_h, E_k),$$

E_1, E_2, E_3 désignant les points (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1). Les neuf $H(X_h, X_k)$ apparaissent ainsi comme n'étant autres que les coefficients de l'équation de (H) lorsqu'on rapporte cette hypersurface, non aux points E_1, E_2, E_3, mais aux points X_1, X_2, X_3. Les valeurs données de ces coefficients détermineront (H) si elles satisfont aux conditions hermitiennes : les valeurs diagonales doivent être réelles et les non diagonales, deux à deux conjuguées. C'est bien le cas des valeurs (88).

Nous supposons toujours que ni les ω_i ni leur somme ne sont multiples de π, ce qui assure, en particulier, comme nous l'avons vu au paragraphe 9, l'indépendance linéaire des points X_1, X_2, X_3.

Nous arrivons ainsi au résultat suivant :

Les paramètres ω_i et leur somme étant supposés non nuls (mod π), *il existe une hypersurface hermitienne, et une seule, orthogonale aux quatre chaînes planaires du cycle* (66); *les nombres* (88) *donnent les coefficients de la forme d'Hermite qui la rapporte aux points* X_1, X_2, X_3.

En donnant aux ω_i les valeurs (83), nous obtenons ainsi l'hypersurface hermitienne qui se conserve par les substitutions S_{0x}, S_{1x}, S_{xy}, $S_{x\infty}$ et par le groupe qu'elles engendrent. *Elle se conserve aussi par le groupe de monodromie du système* (2), lequel contient de plus, comme nous l'avons vu, S_{1y}, S_{0y}, S_{01}. En effet, l'hypersurface qui conjugue P_{0x} et Π_{0x}, et $P_{x\infty}$ et $\Pi_{x\infty}$, conjugue le point P_{1y}, l'intersection de Π_{0x} et de $\Pi_{x\infty}$, et le plan Π_{1y}, qui passe par P_{0x} et $P_{x\infty}$. La substitution S_{1y}, qui a ainsi son point et son plan caractéristiques conjugués et dont le quotient propre est unimodulaire, conserve dès lors, comme on le démontrerait sans difficulté, la même hypersurface. On raisonne de même pour S_{0y} et S_{01}.

13. Nature elliptique ou hyperbolique de l'hypersurface. — Il est équivalent de dire d'une substitution S, soit qu'elle conserve l'hypersurface (H), soit qu'elle conserve, à un facteur près, la forme d'Hermite $H(z)$. C'est cette dernière manière de s'exprimer qui est la meilleure : elle demeure valable pour une forme d'Hermite qui ne s'annule jamais.

Étant donnée une forme d'Hermite, on peut la rendre diagonale en la rapportant à trois points M, M′, M″ deux à deux conjugués. En posant

$$Z = uM + u'M' + u''M'',$$

on a ainsi

$$H(Z) = A_{hk} z_h z_k = Buu + B'u'u' + B''u''u''.$$

Les coefficients B, B′, B″, toujours réels, ne sont autres que les nombres H(M), H(M′), H(M″). Ils conservent *ensemble* leurs signes lorsqu'on passe d'un système de trois points conjugués à un autre. La démonstration de cette propriété est la même que pour les formes quadratiques classiques : nous n'y insisterons pas.

Aucun des trois coefficients ne peut être nul si la forme d'Hermite n'est pas dégénérée, c'est-à-dire si $|A_{hk}| \neq 0$. En nous bornant aux formes d'Hermite non dégénérée, nous n'avons donc que deux cas à distinguer :

1° Les trois coefficients sont du même signe. La forme d'Hermite prend alors ce même signe quel que soit Z; elle est dite *elliptique*. Elle ne s'annule jamais.

2° Les trois coefficients ne sont pas du même signe, La forme d'Hermite, dite *hyperbolique*, peut alors s'annuler; elle donne une hypersurface hermitienne au sens strict, à trois dimensions réelles.

On peut trouver trois points conjugués de la forme

$$M(1, 0, 0), \quad M'(z'_1, z'_2, 0), \quad M''(z''_1, z''_2, z''_3).$$

On obtient d'abord le point M″ en remarquant que son plan conjugué, qui a pour équation

$$\sum A_{h1}\bar{z}''_h z_1 + \sum A_{h2}\bar{z}''_h z_2 + \sum A_{h3}\bar{z}''_h z_3 = 0,$$

n'est autre que $z_3 = 0$, ce qui donne

$$\sum A_{h1}\bar{z}''_h = A_{11}\bar{z}''_1 + A_{21}\bar{z}''_2 + A_{31}\bar{z}''_3 = 0,$$

$$\sum A_{h2}\bar{z}''_h = A_{12}\bar{z}''_1 + A_{22}\bar{z}''_2 + A_{32}\bar{z}''_3 = 0.$$

Les trois déterminants du second ordre de ces dernières relations étant identifiés à $\bar{z}''_1$, $\bar{z}''_2$, $\bar{z}''_3$, on en déduit

$$\sum A_{h3}\bar{z}''_h = A_{13}\bar{z}''_1 + A_{23}\bar{z}''_2 + A_{33}\bar{z}''_3 = |A_{hk}|;$$

puis

$$H(M'') = |A_{kh}|\, z''_3 = |A_{kh}| \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}.$$

On obtient ensuite M′ en opérant de même dans le sous-espace $z_3 = 0$; on aura de même

$$H(M') = H(z'_1, z'_2, 0) = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} A_{11}.$$

Comme

$$H(M) = H(1, 0, 0) = A_{11}.$$

il en résulte le critère suivant :

Pour que la forme d'Hermite H(Z) *soit elliptique, il faut et il suffit qu'on ait simultanément*

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0, \qquad A_{11}|A_{hk}| > 0.$$

Pour l'hypersurface du paragraphe précédent, considérons toujours la forme d'Hermite qui la rapporte aux points X_1, X_2, X_3, forme dont nous avons en (88) le tableau des coefficients; désignons ces coefficients par A'_{hk}. Nous avons

$$\Delta_1 = A'_{11} = \frac{-\sin\theta_1}{\sin\omega_1} = \frac{-\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}{\sin\omega_1},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A'_{11} & A'_{12} \\ A'_{21} & A'_{22} \end{vmatrix} = \frac{\sin\theta_1 \sin\theta_2}{\sin\omega_1 \sin\omega_2} - 1,$$

$$\Delta_3 = |A'_{hk}| = \frac{-\sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3}{\sin\omega_1 \sin\omega_2 \sin\omega_3} + \frac{\sin\theta_1}{\sin\omega_1} + \frac{\sin\theta_2}{\sin\omega_2} + \frac{\sin\theta_3}{\sin\omega_3} + 2\cos\left(\sum\omega\right).$$

On calcule sans difficultés ces expressions; on trouvera

$$(89)\qquad \begin{cases} \Delta_1 = \dfrac{-\sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4)}{\sin\omega_1}, \qquad \Delta_2 = \dfrac{\sin(\omega_3+\omega_4)\sin\left(\sum\omega\right)}{\sin\omega_1 \sin\omega_2}, \\ \Delta_3 = \dfrac{-\sin\omega_4 \sin^2\left(\sum\omega\right)}{\sin\omega_1 \sin\omega_2 \sin\omega_3}. \end{cases}$$

Les ω_i et leur somme n'étant pas nuls (mod π), le déterminant Δ_3 n'est jamais nul, ce qui assure la non-dégénérescence de $H(Z)$: cette forme d'Hermite sera elliptique ou hyperbolique. Les conditions d'ellipticité $\Delta_2 > 0$, $\Delta_1 \Delta_3 > 0$, que simplifie encore la suppression de termes positifs et non nuls, deviennent

$$\sin\omega_1 \sin\omega_2 \sin(\omega_3+\omega_4) \sin\left(\sum\omega\right) > 0,$$

$$\sin\omega_2 \sin\omega_3 \sin\omega_4 \sin(\omega_2+\omega_3+\omega_4) > 0.$$

ou encore, compte tenu des valeurs (83),

$$(90)\qquad \begin{cases} \sin\alpha\pi \sin\beta\pi \sin\gamma\pi \sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi > 0, \\ \sin\beta\pi \sin\delta\pi \sin(\alpha+\gamma)\pi \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi > 0. \end{cases}$$

Nous avons vu que les parties non entières des constantes α, β, γ, δ influencent seules le groupe de monodromie; nous ne restreindrons donc pas les résultats en nous limitant au cas où ces constantes sont positives et inférieures à 1 :

$$(91)\qquad 0 < \alpha < 1, \qquad 0 < \beta < 1, \qquad 0 < \gamma < 1, \qquad 0 < \delta < 1,$$

ce qui permet de remplacer (90) par

$$(92)\qquad \sin(\alpha+\beta+\gamma)\pi > 0, \qquad \sin(\alpha+\gamma)\pi \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)\pi > 0.$$

Les inégalités (91) entraînant

$$0 < \alpha + \gamma < 2, \qquad 0 < \alpha + \beta + \gamma < 3, \qquad 0 < \alpha + \beta + \gamma + \delta < 4,$$

nous avons, pour les diverses valeurs de $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, les résultats suivants :

1° $0 < \alpha + \beta + \gamma + \delta < 1$. — Les trois sinus étant alors positifs, la forme d'Hermite est elliptique.

2° $1 < \alpha + \beta + \gamma + \delta < 2$. — On a alors, ou bien $\alpha + \gamma < 1$, ou bien $\alpha + \beta + \gamma > 1$.

Dans le premier cas.

$$\sin(\alpha + \gamma)\pi > 0, \qquad \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\pi < 0, \qquad \text{H(Z) hyperbolique.}$$

Dans le deuxième cas,

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma)\pi < 0, \qquad \text{H(Z) hyperbolique.}$$

3° $2 < \alpha + \beta + \gamma + \delta < 3$, ce qui entraîne $\alpha + \beta + \gamma > 1$. On a alors, ou bien $\alpha + \beta + \gamma < 2$, ou bien $\alpha + \gamma > 1$.

Dans le premier cas,

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma)\pi < 0, \qquad \text{H(Z) hyperbolique.}$$

Dans le deuxième cas,

$$\sin(\alpha + \gamma)\pi < 0, \qquad \sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\pi > 0, \qquad \text{H(Z) hyperbolique.}$$

4° $3 < \alpha + \beta + \gamma + \delta < 4$, ce qui entraîne $\alpha + \beta + \gamma > 2$, $\alpha + \gamma > 1$. On a alors

$$\sin(\alpha + \gamma)\pi < 0, \qquad \sin(\alpha + \beta + \gamma)\pi > 0,$$
$$\sin(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\pi < 0, \qquad \text{H(Z) elliptique.}$$

On peut ainsi conclure :

Les constantes α, β, γ, δ *étant supposées non entières ainsi que leur somme, soient* α', β', γ', δ' *les quatre nombres positifs et inférieurs à* 1 *qui diffèrent de* α, β, γ, δ *par des entiers; la forme d'Hermite* H(Z) *est alors elliptique si l'on a*

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' < 1 \qquad \text{ou} \qquad \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' > 3,$$

hyperbolique si l'on a

$$1 < \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' < 3.$$

14. Dernière remarque. — Sans nous étendre sur les généralisations que le présent travail suggère naturellement, disons un mot des fonctions hypergéométriques de plus de deux variables

$$\int u^{\alpha}(u-1)^{\beta}(u-x)^{\gamma}(u-y)^{\delta}\ldots(u-t)^{\lambda}\,du.$$

Solutions d'un système d'équations aux dérivées pertielles complètement intégrable, semblable à (2), d'ordre $n+1$ pour n variables, elles admettent un

groupe de monodromie dont les substitutions sont d'ordre $n+1$. L'étude géométrique de ce groupe amène à considérer deux espaces, l'un pour les variables et l'autre pour les fonctions, espaces projectifs à n dimensions complexes. On étend sans peine à ces espaces beaucoup de nos résultats, ceux des chapitres III et IV en particulier.

Le fait de nous limiter à deux variables a par contre, comme on a pu le voir, rendu possibles d'importantes précisions sur la structure et la détermination du groupe de monodromie, grâce aux chapitres I et II.

BIBLIOGRAPHIE.

J. Kampé de Fériet, *La fonction hypergéométrique* (*Mémor. Sc. Math.*, fasc. 85, 1937).

L. Fuchs, *Zur theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten* (*Journal de Crelle*, t. 66, p. 121 et suiv.).

L. Pochhammer, *Ueber Hypergeometrische Funktionen n-ter Ordnung* (*Journal de Crelle*, t. 71, 1869, p. 316 et suiv.) (*Cf.* Note de Fuchs, *ibid.*, t. 72, p. 255 et suiv.).

L. Pochhammer, *Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf* (*Math. Ann.*, t. 35, 1890, p. 470 et suiv.).

P. Appell, *Séries hypergéométriques de plusieurs variables* (*Mémor. Sc. Math.*, fasc. 3, 1925).

E. Picard, *Extension aux fonctions de deux variables du problème de Riemann relatif aux fonctions hypergéométriques* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 2e série, t. 10, 1881, p. 303-322).

E. Picard, *Sur les fonctions hyperfuchsiennes provenant des séries hypergéométriques de deux variables* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 3e série, t. 2, 1885, p. 357-384).

E. Cartan, *Leçons sur la géométrie projective complexe*, Paris, 1931, p. 124 et suiv.

V. Ou Tchen-Yang, *Sur les fonctions hypergéométriques de plusieurs variables* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1524-1526).

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Groupes et fonctions automorphes

Vu et approuvé :

Paris, le 11 juin 1954.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. PÉRÈS.

Vu et permis d'imprimer :

Pour le Recteur de l'Académie de Paris,

Le Vice-Président du Conseil de l'Université

FABRE.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
55, Quai des Grands-Augustins, 55.

147306-55

Dépôt légal, Imprimeur, 1955, n° 1040.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS
147306 Quai des Grands-Augustins, 55.